C. Mathematik.

§ 60.

Einleitung.

Unter Zahl versteht man den Begriff einer bestimmten Menge gleichartiger Dinge; wie groß die Menge dieser gleichartigen Dinge ist, giebt die Zahl an. Eine Zahl, welche allein dasteht, ohne irgend welche Dinge zu benennen, ist eine unbenannte (abstrakte) Zahl; fügt man der Zahl dagegen irgend eine Benennung hinzu, so entsteht die benannte Zahl; z. B. 5 ist eine unbenannte Zahl, 5 Bäume dagegen ist eine benannte Zahl. Jedes Ding, welches durch eine benannte Zahl ausgedrückt ist oder doch als solche ausgedrückt werden kann, nennt man eine Größe.

Will man nun wissen, ob irgend eine Sache eine Größe ist, so hat man nur zu ermitteln, ob sie sich durch eine benannte Zahl ausdrücken läßt; dazu bedarf man jedoch einer anderen Größe, mit welcher man die zu untersuchende Sache messen kann, die man Einheit oder Maaß nennt und irgend einer unbenannten Zahl, welche die Anzahl der Einheiten angiebt, die in der zu ermittelnden Sache enthalten sind. Diese unbenannte Zahl, welche sich beim Messen als Resultat ergiebt, nennt man das Maaß der Größe in Bezug auf die gewählte Einheit.

Geld ist z. B. nach Obigem eine Größe, denn es läßt sich durch eine benannte Zahl, z. B. 7 Mark, ausdrücken; in diesem Falle ist eine Mark die Einheit oder das Maaß und die unbenannte Zahl 7 das Maaß dieser Größe in Bezug auf die Einheit „eine Mark“.

Aendert sich die Einheit, so ändert sich natürlich auch das Maaß; so kann man z. B. die obige Größe auch durch die benannte Zahl 700 Pfennig ausdrücken. Hieraus folgt, daß jede Sache eine Größe ist, für welche es irgend eine Einheit giebt, mit welcher man dieselbe wirklich messen kann.

Die unbenannte Zahl ist keine Größe, da sie nach obiger Erklärung nur ein Mittel bietet, um Größen messen zu können.

Die Mathematik ist nun diejenige Wissenschaft, welche sich mit der Vergleichung der Größen als solcher beschäftigt. Sie zerfällt in zwei Haupttheile:

a. in die **Zahlenlehre oder Arithmetik**, welche sich nur mit den Zahlen beschäftigt und zugleich die Grundlage der ganzen Wissenschaft bildet, und

b. in die **Größenlehre oder Geometrie**, welche die Beziehungen der Größen unter sich untersucht. Je nachdem sich die Größenlehre nun mit Flächen oder Körpern beschäftigt, zerfällt sie in die Unterabtheilungen:

1. Flächenvermessung oder Planimetrie;
2. Körpervermessung oder Stereometrie.

a. Zahlenlehre oder Arithmetik.

§ 61.

Allgemeine Begriffe.

Rechnen ist die Kunst, aus gegebenen Zahlen unbekannte Zahlen zu finden; die gesuchten unbekannten Zahlen nennt man das **Ergebniß** oder **Resultat**; man gelangt zum Resultate durch vier Hauptrechnungsarten — das Addiren, das Subtrahiren, das Multipliciren und Dividiren —, auch die vier Species genannt, welche hier als bekannt vorausgesetzt werden dürfen.

In der Einleitung haben wir gesehen, daß die Einheit eine Größe ist, mit welcher man benannte Zahlen mißt; denkt man sich diese Einheit in mehrere gleiche Theile getheilt oder gebrochen, so bildet jeder dieser Theile einen sogenannten **Bruch**, und die Zahl, welche denselben ausdrückt, ist eine **gebrochene Zahl**. Ist die Einheit z. B. in acht gleiche Theile getheilt, also in acht Theile oder kürzer in Achtel, so bilden $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} \cdots \frac{7}{8}, \frac{8}{8}$ Brüche, welche man in der angegebenen Weise schreibt. Diejenige Zahl, welche die Theile **nennt**, in welche die Einheit getheilt wurde, steht unter dem Strich und heißt **Nenner**, diejenige Zahl, welche die Theile der Einheit **zählt**, steht über dem Strich und heißt **Zähler**. Ist Nenner und Zähler gleich wie oben in dem Bruch $\frac{8}{8}$, so haben wir wieder die Einheit; ein jeder derartiger Bruch ist gleich 1. Zeigt ein Bruch im Zähler eine größere Zahl als im Nenner, so erhalten wir eine größere Zahl als 1 oder einen sogenannten **unechten** Bruch. Jeder unechte Bruch besteht demnach aus der Einheit oder dem ganzen und noch einem echten Bruch, wie man jeden Bruch nennt, in welchem der Zähler kleiner ist als der Nenner.

§ 63.

Die vier Species der gemeinen Brüche.

Jeder Bruch ist der sovielste Theil seines Zählers als sein Nenner anzeigt; der Bruch $\frac{6}{8}$ ist demnach der achte Theil von sechs; der Bruch deutet mithin nichts anderes an als ein Dividiren, bei dem der Nenner der Divisor und der Zähler der Dividendus ist; der Bruch selber ist ein eigenthümlich geschriebener Quotient; $\frac{6}{8}$ heißt demnach genau soviel als 6 dividirt durch 8 oder $6:8$.

Bei unechten Brüchen führt man zur Ermittelung der in demselben enthaltenen Ganzen die Division auch aus, z. B. der unechte Bruch $\frac{59}{8}$ bedeutet soviel als $59:8 = 7\frac{3}{8}$.

Multiplication von Brüchen. Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

$$\text{z. B. } \frac{5}{7} \cdot (\times) \frac{9}{21} = \frac{45}{147}; \ \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{20} = 1\tfrac{1}{20}.$$

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, indem man den Zähler desselben mit der ganzen Zahl multiplicirt.

$$\text{z. B. } \frac{4}{5} \cdot 6 = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5} = 4\tfrac{4}{5}.$$

Division von Brüchen. Zwei Brüche werden durch einander dividirt, indem man den Divisor (Nennerbruch) umkehrt (d. h. den Nenner zum Zähler macht) und den Dividendus (Zählerbruch) nach vorstehender Regel mit demselben multiplicirt.

z. B. $\frac{6}{8}$ dividirt durch $\frac{3}{5}$ oder auf andere Weisen geschrieben $\frac{6}{8} : \frac{3}{5}$ oder $\frac{\frac{6}{8}}{\frac{3}{5}}$ ist gleich $\frac{6}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{30}{24} = 1\frac{6}{24} = 1\frac{1}{4}$.

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, indem man den Nenner desselben mit der Zahl multiplicirt.

$$\text{z. B. } \frac{6}{8} : 5 \text{ oder } \frac{\frac{6}{8}}{5} = \frac{6}{8 \cdot 5} = \frac{6}{40}.$$

Alle Brüche bleiben unverändert, wenn man sie im Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt.

$$\text{z. B. } \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} \ldots \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} \text{ u. s. w.;}$$

wenn man nämlich die Multiplication ausführt, so erhält man immer wieder $\frac{3}{4}$.

$$\text{z. B. } \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} \text{ oder } \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}, \text{ da } \frac{6}{8} \text{ und } \frac{9}{12} = \frac{3}{4};$$

in gleicher Weise bleiben Brüche unverändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt.

$$\text{z. B. } \frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}.$$

Letzteres nennt man das Heben der Brüche.

Brüche, in welchen Zähler und Nenner große Zahlen bilden, vereinfacht (reducirt oder hebt) man dadurch, daß man Zähler und Nenner mit denselben Zahlen so lange dividirt, bis sie sich nicht mehr mit einer gemeinschaftlichen Zahl weiter theilen lassen.

z. B. den Bruch $\frac{21420}{30240}$ verwandelt man zunächst durch Theilung von Zähler und Nenner mit 10 in den Bruch $\frac{2142}{3024}$, durch weitere Theilung mit 2 in $\frac{1071}{1512}$, durch weitere Theilung mit 3 in $\frac{357}{504}$, durch nochmalige Theilung mit 3 in $\frac{119}{168}$, durch nochmalige Theilung mit 7 in $\frac{17}{24}$; da sich 17 und 24 durch keine gemeinschaftliche Zahl weiter theilen lassen, so ist $\frac{17}{24}$ der kleinste andere Bruch, durch den sich $\frac{21420}{30240}$ ausdrücken läßt.

Hierbei sei gleich erwähnt, daß man alle Zahlen, deren größter gemeinschaftlicher Theiler gleich eins ist oder die außer eins und sich selbst keinen anderen Theiler haben, Primzahlen nennt; also 17 ist z. B. eine Primzahl, außerdem sind noch Primzahlen z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29 ꝛc.

Um sich das Vereinfachen (Reduciren, Heben) von großen Brüchen zu erleichtern, hat man folgende eigenthümlichen Gesetze herausgefunden:

1. Läßt sich eine Zahl durch eine andere theilen, so ist auch jedes Vielfache dieser Zahl durch dieselbe Zahl theilbar.
2. Lassen sich zwei Zahlen durch eine andere theilen, so lassen sich auch ihre Summen und Differenzen durch dieselbe Ziffer theilen.
3. Eine Zahl ist durch 10 theilbar, wenn deren letzte Zahl eine 0 ist.
4. Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn die letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist.
5. Eine Zahl ist durch 2 theilbar, wenn deren Einer durch 2 theilbar sind.
6. Eine Zahl ist durch 4 theilbar, wenn deren Zehner und Einer durch 4 theilbar sind.
7. Eine Zahl ist durch 8 theilbar, wenn deren Hunderte, Zehner und Einer durch 8 theilbar sind.
8. Eine Zahl ist durch 3 und 9 theilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 und 9 theilbar ist.
9. Eine Zahl ist durch 6 theilbar, wenn sie durch 2 und 3 theilbar ist.

Um Brüche zu einander addiren oder von einander subtrahiren zu können, muß man ihre Nenner gleich machen, d. h. für sie einen gemeinschaftlichen Nenner, Generalnenner und zwar den kleinsten Generalnenner finden. Ist dieser gefunden, so hat man die Zähler zu addiren oder zu subtrahiren und ihrer Summe oder ihrer Differenz den Generalnenner zu geben; der kleinste Generalnenner wird einfach dadurch gefunden, daß man die Nenner der Brüche neben einander hinschreibt und so lange als möglich in dieselben mit den kleinsten Primzahlen hineindividirt; das Produkt sämmtlicher Theilzahlen und Primzahlen ist der gesuchte kleinste Generalnenner. Die beiden folgenden Beispiele werden das Verfahren verdeutlichen:

Es sind zu addiren: $\frac{2}{3} + \frac{2}{7} + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{7}{8}$;

	3	7	9	4	8
2)	3	7	9	2	4
2)	3	7	9	1	2
3)	1	7	3	1	2

Da sich die in der untersten Linie stehenden Ziffern nicht mehr theilen lassen, so sind es Primzahlen und haben wir sie nur mit den an der Seite stehenden gemeinschaftlichen Theilern, die ebenfalls Primzahlen sein müssen, zu multipliciren, um den Generalnenner zu erhalten.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 = 504.$$

Um nun zu erfahren, wie sich die einzelnen Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$ 2c. zum Generalnenner 504 verhalten, haben wir mit jedem Nenner in den Generalnenner hinein zu dividiren und die so erhaltene Zahl mit den einzelnen Brüchen zu multipliciren; der Uebersichtlichkeit wegen schreibt man sämmtliche Nenner, wie es das Beispiel zeigt, vor einen senkrechten Strich und über denselben den Generalnenner.

$$\begin{array}{c|lllll}
 & 504 & & & & \\
\hline
\frac{2}{3} & \frac{504}{3} = 168 = \frac{168 \cdot 2}{168 \cdot 3} = \frac{336}{504} & & & & 336 \\
\frac{2}{7} & \frac{504}{7} = 72 = \frac{72 \cdot 2}{72 \cdot 7} = \frac{144}{504} & & & & 144 \\
\frac{4}{9} & \frac{504}{9} = 56 = \frac{56 \cdot 4}{56 \cdot 9} = \frac{224}{504} & & & & 224 \\
\frac{1}{4} & \frac{504}{4} = 126 = \frac{126 \cdot 1}{126 \cdot 4} = \frac{126}{505} & & & & 126 \\
\frac{7}{8} & \frac{504}{8} = 63 = \frac{63 \cdot 7}{63 \cdot 8} = \frac{441}{504} & & & & 441 \\
\cline{6-6}
 & & & & \text{Summa} & \frac{1271}{504} = 2\frac{263}{504}.
\end{array}$$

Beim Subtrahiren wird in gleicher Weise verfahren; z. B. es ist von $\frac{7}{8}$ abzuziehen $\frac{5}{12}$.

$$4)\ \frac{8 \cdot 12}{2 \cdot \ 3}$$

$$\text{Generalnenner} = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

$$\begin{array}{c|l}
 & 24 \\
\hline
\frac{7}{8} & 21 \\
\frac{5}{12} & 10 \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Rest} = \frac{11}{24}.$$

Für dieses Beispiel ist die abgekürzte Rechnungsschreibweise gewählt, um auch diese zu zeigen; die Rechnung vollständig ausgeführt, würde sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{array}{l} \underline{\quad 24 \quad} \\ \frac{7}{8}\Big|\frac{24}{8} = 3;\ \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24};\ 21 \\ \frac{5}{12}\Big|\frac{24}{12} = 2;\ \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{10}{24};\ \underline{10} \\ \qquad\qquad\qquad \text{Rest} = \frac{11}{24}. \end{array}$$

Auf einem anderen Wege kann man zwei Brüche von einander subtrahiren, indem man den Zähler des Minuendus mit dem Nenner des Subtrahendus und ebenso den Nenner des Minuendus mit dem Zähler des Subtrahendus multiplicirt, das letztere Produkt vom ersteren abzieht und den Rest als Zähler, das Produkt der Nenner beider von einander abzuziehenden Brüche aber als Nenner des neuen Restbruches hinschreibt.

z. B. $\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = \frac{7 \cdot 12 - 8 \cdot 5}{8 \cdot 12} = \frac{84-40}{96} = \frac{44}{96} = \frac{11}{24}$,

also genau dasselbe Resultat wie vorher.

§ 63.

Rechnen mit zehntheiligen Decimalbrüchen.

Alle Brüche, deren Zähler eine ganze Zahl, deren Nenner 10 oder eine Potenz*) von 10 ist, nennt man einen zehntheiligen oder **Decimalbruch**. Der Bequemlichkeit wegen läßt man beim Schreiben den Nenner allemal fort und deutet denselben dadurch an, daß man im Zähler von rechts nach links soviel Stellen durch ein Komma (Decimalstrich) abschneidet, als der Nenner Nullen haben würde. Diejenigen Ziffern, welche links vom Komma stehen, sind die Ganzen, welche rechts vom Komma stehen sind die Decimalstellen, d. h. sie drücken einen Bruch aus, dessen Zähler die betreffenden Ziffern, dessen Nenner eine 1 und außerdem so viele Nullen als der Zähler Ziffern hat, bilden.

Sollten im Zähler nicht genug Ziffern oder keine Ganzen vorhanden sein, so ergänzt man sie durch Nullen. Die erste Stelle rechts

*) Wenn man eine Zahl (Grundzahl) 2, 3, 4 ꝛc. mal mit sich selbst multiplicirt, so nennt man dies die Zahl potenziren, z. B. 10 viermal mit sich selbst multiplicirt, ist die 4. Potenz von 10 = 10000.

vom Komma steht immer in der Stelle der Zehntel, die zweite in der Stelle der Hunderte u. s. w.

z. B. $213\frac{24}{100}$ schreibt man als Decimalbruch 213,24:

$2132\frac{4}{10} = 2132{,}4$ u. s. w. $\frac{23}{1000} = 0{,}023$;

$\frac{234}{100} = 2{,}34$; $\frac{234}{10} = 23{,}4$.

Addiren von Decimalbrüchen. Decimalbrüche werden addirt, indem man die Brüche so unter einander schreibt, daß sämmtliche Kommata genau unter einander stehen, worauf man die Brüche wie ganze Zahlen addirt und nur das Komma stehen läßt.

z. B.
$$\begin{array}{r} 3564{,}121 \\ 1{,}2 \\ 5430{,}003 \\ 62{,}102 \\ 2000{,}2 \\ \hline 11057{,}626 \end{array} = 11057\tfrac{626}{1000}.$$

Subtrahiren von Decimalbrüchen. Man verfährt ähnlich wie beim Addiren, d. h. man schreibt die abzuziehenden Zahlen genau mit den Kommas unter einander und füllt, wenn die Stellen rechts vom Komma in beiden Brüchen nicht gleich sein sollten, dieselben durch Nullen aus, die das Nichtvorhandensein von Stellen andeuten.

z. B. $17{,}04 - 2{,}005783 = \begin{array}{r} 17{,}040000 \\ -\ 2{,}005783 \\ \hline 15{,}034217 \end{array}$

oder z. B. $301{,}00572 - 101{,}01 = \begin{array}{r} 301{,}00572 \\ -\ 101{,}01000 \\ \hline 199{,}99572 \end{array}.$

Multipliciren von Decimalbrüchen. Zwei Decimalbrüche werden multiplicirt, indem man sie wie ganze Zahlen multiplicirt und dem erhaltenen Produkt soviel Decimalstellen (rechts vom Komma!) giebt, als beide Faktoren zusammen haben. Reichen die Ziffern nicht aus, so werden sie durch Nullen ergänzt.

z. B. $\begin{array}{r} 2{,}10 \cdot 3{,}1 \\ \hline 210 \\ 630 \\ \hline 6{,}510 \end{array}$ oder $\begin{array}{r} 2{,}3 \cdot 0{,}04 \\ \hline 0{,}092 \end{array}$

Der erste Decimalbruch (2,10) hat zwei Decimalen, der zweite

(3,1) eine Decimale, folglich muß das Produkt 2 + 1 = 3 Decimalen haben.

Ein Decimalbruch wird mit 10, 100 u. s. w. multiplicirt, indem man einfach das Komma um soviel Stellen von links nach rechts rückt, als der Multiplicator Nullen hat.

z. B. 40,372 · 100 = 4037,2, da 100 zwei Nullen hat, so rückt das Komma zwei Stellen von links nach rechts, also hinter 7; oder 2,1357801 · 100000 = 213578,01.

Dividiren von Decimalbrüchen. Decimalbrüche werden dividirt, indem man Divisor und Dividend gleichstellig macht und dann verfährt wie mit ganzen Zahlen.

z. B. 0,5 : 0,35?	5 : 0,35?
0,50 : 0,35	5,00 : 0,35
50 : 35 = 0,7.	500 : 35 = 0,07.

Ein Decimalbruch wird durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt, indem man das Komma um soviel Stellen von rechts nach links rückt, als obige Zahlen Nullen haben. Sollten die vorhandenen Nullen nicht ausreichen, so setzt man soviel Nullen vor, als erforderlich sind.

z. B. 1000 : 0,567 = 0,000567.

Umwandlung von Brüchen in Decimalbrüche. Wie oben bereits angedeutet wurde, ist jeder Bruch als eine Division des Nenners in den Zähler anzusehen; führt man diese Division aus, so kann man jeden Bruch in einen Decimalbruch verwandeln; man hängt bei echten Brüchen dem Zähler soviel Nullen an, daß die Division möglich ist und schreibt soviel Nullen, als man angehängt hat, als erste Stellen des Quotienten hin. Zwischen die ersten Nullen kommt das Komma.

z. B. $\frac{5}{125}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln?

125 : 500 = 0,04;

geht die Division nicht auf, so kann man sich durch Anhängen von Nullen an den Zähler und fortgesetzte Division dem wahren Werthe bis zu jeder gewünschten Genauigkeit nähern.

Abkürzen von Decimalstellen. Die letzte Stelle, bei welcher man abkürzen muß oder will, wird um 1 erhöht, sobald die folgende Stelle 5 oder größer als 5 ist; ist die folgende Stelle kleiner als 5, läßt man nur die letzte Stelle unverändert.

z. B. 3,4157 würde bei 5 abgekürzt lauten 3,416 (7 ist größer als 5), dagegen 3,4154 unverändert 3,415 (4 ist kleiner als 5). 3,4155 abgekürzt 3,416, weil 5 selbst ebenfalls erhöht.

§ 64.

Einfacher Regeldetri-Dreisatz.

Alle Aufgaben der Regeldetri bestehen aus drei gegebenen Gliedern, zu welchen das vierte gesucht werden soll. Bestandtheile einer solchen Aufgabe sind:

1) das Frageglied (gewöhnlich mit einem ? oder x bezeichnet); 2) das Haupt- oder Parallelglied, welches mit dem Frageglied gleiche Benennung hat; 3) zwei bedingende Glieder.

Die gegebenen Größen stehen nun in den Regeldetri-Aufgaben in einem bestimmten Verhältnisse; nehmen dieselben gleichmäßig zu oder ab, so stehen sie im geraden (direkten) Verhältnisse und die Verhältnisse selbst sind im ersten Falle steigend, im letzteren fallend; steigt aber das eine Verhältniß, während das andere fällt, so sind dieselben ungerade zusammengesetzte (indirekte) Verhältnisse, z. B. je mehr Zeit zu einer Arbeit, desto weniger Arbeiter sind erforderlich. Wir lösen alle diese Aufgaben durch Schluß. Bezüglich der Schlüsse können unterschieden werden:

a. Der Schluß von der Einheit auf die Mehrheit;

b. umgekehrt von der Mehrheit auf die Einheit.

Alle diese Aufgaben lassen sich als bloße Multiplications- und Divisions-Aufgaben betrachten.

c. Der Schluß von einer Mehrheit auf ein Vielfaches derselben;

d. der Schluß von einer Mehrheit auf einen verwandten (aliquoten) Theil derselben.

Auch diese beiden Arten sind durch einfache Multiplication und Division zu lösen.

e. Der Schluß von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit vermittelst des gemeinschaftlichen Maaßes. Hierbei läßt sich heben und kürzen;

f. der Schluß von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit vermittelst der Einheit.

Dieses Verfahren findet die häufigste Anwendung.

Beispiele

zu a. Wenn 1 kg Kiefernsamen $2\frac{3}{4}$ M. kostet — wie theuer sind $4\frac{3}{4}$ kg?

$$2\tfrac{3}{4} \cdot 4\tfrac{3}{4} = \frac{11}{4} \cdot \frac{19}{4} = \frac{209}{16} = 13\tfrac{1}{16} \text{ M.}$$

Zu b. 19 m Zeug kosten 60 M. 80 Pf.; was kostet 1 m?

60 M. 80 Pf. : 19 = 3 M. 20 Pf.
57
380.

Zu c. Eine Festung hat Proviant für 1600 Mann auf $5\frac{1}{2}$ Monat; wie lange würden mit demselben Vorrath 4800 Mann reichen?

1600 Mann reichen $5\frac{1}{2}$ Monat
4800 „ „ ? „

$$? = \frac{11 \cdot 1600}{2 \cdot 4800} = \tfrac{11}{6} = 1\tfrac{5}{6} \text{ Monat.}$$

Zu d. 6 Zimmergesellen fertigen einen Dachstuhl in 8 Wochen 3 Tagen an; wieviel Gesellen muß der Meister anstellen, wenn die Arbeit in 2 Wochen 5 Tagen fertig soll?

2 W. 5 Tag. = 17 Arbeitst. sind der 3. Theil von 8 W. 3 Tag. (51 Tag.). Soll also der Dachstuhl in dem 3. Theil der Zeit fertig werden, so braucht man die dreifache Arbeitskraft.

Ansatz: Um in 51 Tag. fert. z. werd., br. m. 6 Ges.
„ „ 17 „ „ „ „ „ „ ? „

$$? = \frac{6 \cdot 51}{17} = 18 \text{ Ges.}$$

Zu e. 12 Pfd. kosten 14 M. 40 Pf., wie theuer sind 9 Pfd.?

Wir schließen zunächst auf das gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 12 und 9; das ist 3. Wir fragen nach dem Preis von 3 Pfd.; 3 Pfd. ist der 4. Theil von 12 Pfd.; folglich kosten sie den 4. Theil von 14 M. 40 Pf.

Ansatz: 12 Pfd. kosten 14,40 M.
9 „ „ ? „

$$? = \frac{14{,}40 \cdot 9}{12} = \frac{14{,}40 \cdot 3}{4} = \frac{43{,}20}{4} = 10 \text{ M. } 80 \text{ Pf.}$$

Zu f. 7 Buch Zeichenpapier kosten 5 M.; was kosten 9 Buch?

Wir schließen zunächst von der Mehrheit auf die Einheit und dann auf die andere Mehrheit. Wenn 7 Buch 5 M. kosten, so kostet

1 Buch den 7. Theil von 5 M. = $\frac{5}{7}$ M., mithin 9 Buch 9mal so viel.

Ansatz: 7 Buch kosten 5 M.

9 „ „ ? „

$$? = \frac{5 \cdot 9}{7} = \frac{45}{7} = 6\tfrac{3}{7} \text{ M.}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

1. Wenn man täglich 60 Pf. ausgiebt, so reicht man 7 Wochen 4 Tage; wie lange reicht man, wenn man täglich nur 40 Pf. ausgiebt? (11 Wochen $2^1/_2$ Tag!)

2. 27 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit $7^1/_2$ Tag, wie lange brauchen zu derselben Arbeit 12 Arbeiter? ($16^7/_8$ Tag!)

3. Ein Saal soll mit Decken belegt werden. Liegt der Stoff 0,6 m breit, so sind 50,75 m nöthig; wieviel m gebraucht man, wenn der Stoff: a. 0,9; b. 0,65; c. 1,05; d. 1,18 m breit liegt? (a. 33,833, b. 46,846, c. 29, d. 25,805 m.)

4. $51^1/_3$ m $1^3/_4$ m breites Zeug wird gegen $1^2/_3$ m breites umgetauscht; wieviel erhält man? (53,9 m.)

5. Aus einer Kiefer können 25 Bretter von $4^1/_2$ cm Stärke geschnitten werden; wieviel erhält man, wenn dieselben $3^3/_4$ cm dick werden sollen? (30 Stück.)

6. Ein Fuhrmann ladet auf ein Pferd 10 Scheffel Weizen; wieviel auf 2 Ochsen, wenn 3 Pferde soviel ziehen als 4 Ochsen? (15 Scheffel.)

§ 65.

Zusammengesetzte Regeldetri.

Zusammengesetzte Regeldetri-Aufgaben entstehen, wenn sie aus mehr als 3 — also z. B. aus 5, 7, 9 u. s. w. gegebenen Gliedern bestehen, zu welcher das 6., 8., 10 u. s. w. Glied gesucht werden soll.

Da in diesen Aufgaben immer eine Zahl vorkommt, die mit der gesuchten gleichartig ist, außerdem aber je zwei gleichartige, so enthalten die Aufgaben immer eine ungerade Zahl von Gliedern.

Wir lösen diese Aufgaben ebenfalls durch Schluß und bedienen uns dabei des Bruchsatzes, weil er am natürlichsten und verständlichsten ist.

Beispiele:

1) 9 Mädchen stricken in 18 Tag. 54 Paar Strümpfe; wieviel Paare stricken 12 Mädchen in 4 Tagen?

9 M. str. in 18 Tag. 54 Paar
1 „ „ „ 18 „ 54 : 9 = 6 Paar
1 „ „ „ 1 „ 6 : 18 = $\frac{1}{3}$ „

12 M. str. in 1 Tag. $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ Paar.
12 „ „ „ 4 „ $4 \cdot 4 = 16$ „

oder mit Hilfe des gemeinschaftlichen Maaßes.

9 M. str. in 18 Tag. 54 Paar
3 „ „ den 3. Theil = 18 Paar
12 „ „ das 4fache = 72 „

72 P. stricken 12 M. in 18 Tag., da str. sie in 2 Tag. den 9. Th. von 72 P. = 8 P. und in 4 Tag. das Doppelte = 16 Paar.

Ansatz: 9 M. str. in 18 Tag. 54 Paar
12 „ „ „ 4 „ ? „

$$? = \frac{54 \cdot 12 \cdot 4 \cdot}{9 \cdot 18} = \frac{12 \cdot 4}{3} = 16 \text{ Paar.}$$

2) 4 Pflüge bearbeiten in $3\frac{1}{2}$ Tag. $8\frac{3}{4}$ ha Kulturfläche; in wieviel Tag. können mit 5 Pfl. $12\frac{1}{2}$ ha bearbeitet werden.

4 Pfl. br. $3\frac{1}{2}$ Tag.
1 „ „ $4 \cdot 3\frac{1}{2}$ T. = 14 Tage.
5 „ „ den 5. Theil = $2\frac{4}{5}$ Tage.

$2\frac{4}{5}$ Tage brauchen sie, um $8\frac{3}{4}$ ha umzupflügen, um $\frac{1}{4}$ ha zu bearbeiten, brauchen sie den 35. Theil von $\frac{14}{5}$ Tag = $\frac{2}{25}$ Tag.

Um $\frac{1}{2}$ ha zu bearb. br. sie $2 \cdot \frac{2}{25} = \frac{4}{25}$ Tag.,
„ $\frac{25}{2}$ „ „ „ „ „ $\frac{25 \cdot 4}{25} = 4$ Tage.

Ansatz: 4 Pflüge brauchen um $8\frac{3}{4}$ ha zu bearbeiten $3\frac{1}{2}$ Tag
5 „ „ „ $12\frac{1}{2}$ „ „ „ ? „

$$? = \frac{7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 25}{2 \cdot 5 \cdot 35 \cdot 2} = 4 \text{ Tage.}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

1. Wieviel verdienen 8 Arbeiter in 10 Wochen bei täglich zweistündiger Arbeit, wenn 20 Arbeiter in 12 Wochen bei täglich fünfstündiger Thätigkeit 1000 M. verdienen? ($133^1/_3$ M.)

2. An einem Wege haben drei Abtheilungen gearbeitet, und zwar 16 Mann 10 Tage, 20 Mann 12 Tage und außerdem noch 25 Mann. Sie erhalten zusammen 1350 M., wovon die 3. Abtheilung 550 M. bekommt; wie lange hat sie gearbeitet? (11 Tage!)

§ 66.

Zinsrechnung.

Verborgt man einem Anderen Geld, so nennt man diese Summe Kapital, der Verleiher heißt Gläubiger, der Beliehene Schuldner. Der Schuldner soll stets einen Schuldschein in der gesetzlich vorgeschriebenen Form (Namen des Verleihers und Beliehenen, Kapital, Zinsfuß, Zeit, Ort und Datum) ausstellen.

Bei großen Summen und Unsicherheit des Schuldners fordert der Gläubiger eine obrigkeitliche Sicherstellung (Hypothek), durch welche im Falle der Rückzahlungsunfähigkeit als Unterpfand Häuser und Grundstücke zugesichert werden; man unterscheidet nach der Zeit der Beleihungen erste, zweite u. s. w. Hypothek; bei gerichtlichen Verkäufen (Subhastationen) haben die ersten Hypotheken das Vorrecht der Rückzahlung vor den letzten. Für die Hingabe des Kapitals hat Schuldner dem Gläubiger eine Vergütung zu zahlen, welche man Zinsen oder Interessen nennt. Die Bestimmung, wieviel Mark Zinsen von je 10 M. Kapital in einem Jahre zu zahlen, nennt man Zinsfuß oder Procente (lat. pro centum — fürs Hundert), gewöhnlich p. c. oder $^0/_0$ bezeichnet.

Ein Kapital verzinst sich zu $4\frac{3}{4}$ $^0/_0$ heißt, je 100 M. bringen in 1 Jahr $4\frac{3}{4}$ M. Zinsen. Die Zinsrechnung hat es mit 4 Größen zu thun und zwar: Kapital, Zinsen, Zeit und Zinsfuß. Drei Größen müssen stets gegeben sein, die vierte wird gesucht; ist die Zeit nicht bestimmt, so wird immer ein Jahr genommen und zwar zu 360 — der Monat zu 30 Tagen.

Einfache Zinsrechnung.

Das Frageglied ist von zwei bedingenden Gliedern abhängig; wir lösen diese Aufgaben nach Art der einfachen Regeldetri.

a. Die Zinsen werden gesucht.

(Gegeben sind Kapital, Zinsfuß und Zeit.)

1. Wieviel betragen die Zinsen von 532 M. zu 4 $^0/_0$?

Wenn 100 M. 4 M. geben, so geben 500 M. $5 \cdot 4 = 20$ M., $25 = \frac{1}{4}$ Hundert geben 1 M. und 7 M. geben $7 \cdot 4$ Pf. $= 28$ Pf., zusammen 21 M. 28 Pf. (20 + 1 M. + 28 Pf.).

Merke: Soviel M. das Hundert bringt, soviel Pf. die Einheit.

$$\begin{array}{l} \text{Ansatz: } 100 \text{ M. Kap. bringt } 4 \text{ M. Zinsen} \\ \quad 532 \text{ „ \quad „ \quad „ \quad ? „ \quad „} \\ \hline ? = \dfrac{4 \cdot 532}{100} = 21{,}28 \text{ M.} \end{array}$$

2. Ein Haus — für 7600 M. gekauft — verzinst sich zu $5\frac{1}{2}$ %; wieviel Ertrag bringt es jährlich?

Wenn 100 M. $5\frac{1}{2}$ M. einbringen, so bringen 1000 M. 55 M.

$$\begin{array}{lr} 7000 \text{ M. br. } 7 \cdot 55 & = 385 \\ 600 \text{ „ \quad „ } 6 \cdot 5\tfrac{1}{2} & = 33 \\ \hline \text{Sa.} & = 418 \text{ M.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ansatz: } 100 \text{ M. Kap. br. } 5\tfrac{1}{2} \text{ M. Z.} \\ \quad 7600 \text{ „ \quad „ \quad „ \quad ? „ \quad „} \\ \hline ? = \dfrac{11 \cdot 7600}{2 \cdot 100} = 418 \text{ M.} \end{array}$$

b. Das Kapital wird gesucht.

(Gegeben: Zinsen, Zeit und Zinsfuß.)

1. Wieviel Geld müßte man zu $4^1/_2$ % ausleihen, wenn man jährlich $31\frac{1}{2}$ M. Zinsen beziehen will?

Um $4\frac{1}{2}$ M. Zinsen zu bekommen, muß man 100 M. verleihen, um $31\frac{1}{2}$ M. Zinsen zu erhalten, muß man soviel Mal 100 M. verleihen, als $4\frac{1}{2}$ in $31\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ in $\frac{63}{2} = 7$ mal enthalten ist, also 700 M.

$$\begin{array}{l} \text{Ansatz: Um } 4\tfrac{1}{2} \text{ M. Z. zu erh. muß m. } 100 \text{ M. verl.} \\ \quad \text{„ \quad } 31\tfrac{1}{2} \text{ „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad ? \quad „ \quad „} \\ \hline ? = \dfrac{100 \cdot 2 \cdot 63}{9 \cdot 2} = 100 \cdot 7 = 700 \text{ M.} \end{array}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

4 M. 25 Pf. Zinsen zu 5 % (85 M.). 12 M. 80 Pf. Zinsen zu 4 %? (320 M.)
23 „ — „ „ „ $4^1/_2$ „? (512 „). 37 „ $45^1/_2$ „ „ „ $5^1/_2$ „? (681 „)

c. Die Zeit wird gesucht.

(Gegeben: Kapital, Zinsen und Zinsfuß.)

Wann tragen 1000 M. zu 5 % 50 M. Zinsen?

1000 M. brauchen in 1 Jahr zu 5 % 50 M. Zinsen. Um 50 M. Zinsen zu erheben, muß das Kapital 1 Jahr verliehen werden, um aber 125 M. Zinsen zu erhalten, muß das Kapital so viel Jahre verliehen werden, als 50 in 125 enthalten; = $2\frac{1}{2}$ Jahre.

Ansatz: Um 50 M. zu erhalten, muß das Kapital 1 Jahr stehen,
" 125 " " " " " " ? " "

$$? = \frac{1 \cdot 125}{50} = 2{,}5 \text{ Jahre.}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

Berechne die Zeit, in welcher die Zinsen die Höhe des Kapitals erreichen, wenn letzteres a. zu 5, b. zu 4, c. zu 6, d. zu $4^1/_2$, e. zu 3,2, f. zu 3,3, g. zu 4,9 % verliehen ist? (a. 20, b. 25, c. $16^2/_3$, d. $22^2/_9$, e. $31^1/_4$, f. $30^{10}/_{33}$, g. $20^{20}/_{49}$ Jahre.)

d. Der Zinsfuß wird gesucht.
(Gegeben: Kapital, Zinsen und Zeit.)

Zu wieviel % muß man 800 M. ausleihen, um jährlich 36 M. Zinsen zu bekommen?

Wir fragen nach den Zinsen, welche 100 M. bringen! Wenn 800 M. Kapital 36 M. Zinsen bringen, so bringen 100 M. den 8. Theil von 36 M. = $4^1/_2$ M.; das Kapital ist also zu $4^1/_2$ % verliehen.

Ansatz: 800 M. Kapital geben 36 M. Zinsen.
100 " " " ? " "

$$? = \frac{36 \cdot 100}{800} = 4\tfrac{1}{2} \text{ M.}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

Bei wieviel % sind die Zinsen a. $^1/_4$, b. $^1/_5$, c. $^1/_6$, d. $^1/_{10}$, e. $^1/_{20}$, f. $^1/_{25}$, g. $^1/_{30}$. h. $^1/_{50}$ des Kapitals? (a. bei 25, b. 20, c. $12^1/_2$, d. 10, e. 5, f. 4, g. $3^1/_2$, h. 2 %.)

b. Größenlehre.

§ 67.

Raumlehre und Geometrie.

Mit der Raumlehre gelangen wir zur sogenannten angewandten Mathematik, die für den Forstmann eine hohe praktische Bedeutung hat, indem sie ihn Flächen und Körper vermessen lehrt. Man hat in Deutschland folgende gesetzlich vorgeschriebene Maaße:

Längenmaaße.

Die Einheit ist das Meter.

1 Meter (m)	=	10 Decimeter (dm),
1 Decimeter	=	10 Centimeter (cm),
1 Centimeter	=	10 Millimeter (mm),
1 Meter	=	100 Centimeter,
1 Kilometer (km)	=	1000 Meter (7,5 Kilometer = 1 deutsche Meile).

Flächenmaaße.

Die Einheit bildet das Quadratmeter, d. h. ein Quadrat, was 1 Meter lang und 1 Meter breit ist.

1 Ar (a)	=	100 Quadratmeter (qm);		ein Quadrat, was 10 Meter lang und breit.
1 Hektar (ha)	=	10000	„	= 100 Ar; ein Quadrat, was 100 Meter lang und breit.

Körper und Hohlmaaße.

Die Einheit ist das Kubikmeter oder ein Würfel, der 1 Meter lang, 1 Meter breit und 1 Meter hoch ist.

1 Kubikmeter (cbm) = 10 · 10 · 10 Kubikdecimeter (cdm) und gleich 100 · 100 · 100 = 1 Million Kubikcentimeter (ccm).

Die Einheit der Hohlmaaße in cylindrischer Form ist ein Kubikdecimeter, Liter genannt, gleich 1 Tausendstel eines Kubimeters.

100 Liter (l) = 1 Hektoliter (hl). Der alte preußische Scheffel = 54,96 Liter. Ein Neuscheffel = 50 Liter.

Gewichte.

Die Einheit des metrischen Gewichtes ist das Kilogramm = 2 Zollpfund oder das Gewicht des in einem Würfel von $\frac{1}{10}$ m Seitenlänge enthaltenen destillirten Wassers bei + 4° C.

50 Kilogr. (kg) oder 100 Pfund = 1 Centner.

1000 „ = 1 Tonne (t).

Der tausendste Theil eines Kilo = 1 Gramm (g).

$\frac{1}{10}$	Gramm	=	1 Decigramm (dg).
$\frac{1}{100}$	„	=	1 Centigramm (cg).
$\frac{1}{1000}$	„	=	1 Milligramm (mg).

Holzmaaße.

Die Einheit für die Holzmaaße bildet der Würfel des Meters und heißt derselbe in fester Holzmasse Festmeter (fm), dagegen mit losen Holzstücken ausgefüllt, wie z. B. in den Schichtmaaßen, Raummeter (rm).

Um Raummeter in Festmeter zu verwandeln, wie dies zur Buchung und gleichmäßigen Schätzung in der Praxis nöthig wird, muß man die Anzahl der Raummeter je nach den Sortimenten reduciren, z. B. Derbholz-Raummeter mit $\frac{7}{10}$ multipliciren; will man dagegen Festmeter in Derbholz-Raummeter verwandeln, muß man ihre Anzahl mit $\frac{10}{7}$ multipliciren.

z. B. 87 Raummeter Derbholz sind $= 87 \cdot \frac{7}{10} = \frac{609}{10} = 60{,}9$ Festmeter.

87 Festmeter $= 87 \cdot \frac{10}{7} = \frac{870}{7} = 124\frac{2}{7} = 124{,}29$ Raummeter Derbholz. Reiser I. Cl. und Stockholz reducirt man mit 0,4, Reiser II. Cl. mit 0,2.

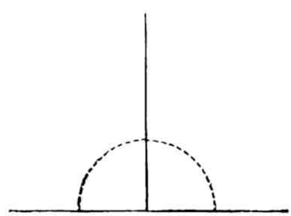
§ 68.

Vermessung von Flächen oder Planimetrie.

Bevor wir zur wirklichen Vermessung übergehen können, müssen wir uns mit einigen Größenverhältnissen von Flächen und den sie begrenzenden Linien und Winkeln bekannt machen.

Unter einem Winkel versteht man die Neigung von zwei sich schneidenden Linien; die den Winkel bildenden Linien heißen seine Schenkel; der Schneidepunkt Scheitel. Zwei auf einer geraden Linie durch eine dritte schneidende Linie gebildete Winkel heißen Nebenwinkel; sind dieselben gleich, so heißen sie rechte Winkel, die schneidende Linie steht in diesem Falle senkrecht auf der durchschnittenen.

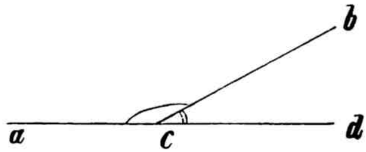
Zwei rechte Winkel mit gemeinschaftlichem Schenkel (siehe Figur 41) bilden einen gestreckten oder flachen Winkel, dessen beide Schenkel eine Gerade bilden. Die Größe der Winkel richtet sich nach der Größe der Neigung ihrer Schenkel und wird nach „Graden“ gemessen; der rechte Winkel hat 90 Grad (90^0); der Grad



Figur 41.

wird in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden getheilt. — Einen Winkel von 33 Grad 27 Minuten 6 Sekunden schreibt man in der Meßkunst $33^0\ 27'\ 6''$ und werden nach dieser Eintheilung sämmtliche zu messende Winkel bezeichnet.

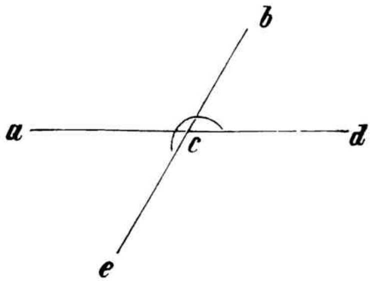
Alle nicht rechten Winkel nennt man schiefe Winkel, welche wieder, wenn sie größer sind als ein rechter, stumpfe Winkel (siehe Figur 42 Winkel a c b), wenn sie kleiner als ein rechter sind (Figur 42 Winkel b c d), spitze Winkel genannt werden. Alle Winkel werden stets so bezeichnet, daß der Scheitelpunkt (in der Figur 42 der Punkt c) in der Mitte genannt wird. Die Summe zweier Nebenwinkel ist immer gleich zwei Rechten oder gleich 180^0; ist die Größe eines Nebenwinkels bekannt, so findet man die Größe des anderen Winkels durch Subtraction des bekannten Winkels von 180^0;



Figur 42.

z. B. Winkel b c d $= 43^0\ 24'\ 7''$, so ist
Winkel b c a $= 136^0\ 35'\ 53''$.

Der Winkel a c d (Figur 42) ist ein Beispiel des flachen Winkels $= 180^0$. Denkt man sich die Linie b c (Figur 43) über den Punkt c hinaus bis zu e verlängert, so entstehen jenseits von a d zwei neue Winkel a c e und d c e, welche zusammen ebenfalls 180^0 oder zwei Rechte betragen; folglich sind die vier Winkel um c herum gleich 360^0. Hätte man nun durch Drehung eines Winkelmeßinstruments in c den in Figur 43 mit einem Haken versehenen überstumpfen Winkel d c e $= 220^0\ 13'\ 11''$ gefunden, so würde sich die Größe des übrigbleibenden Winkels d c e durch Subtraction des überstumpfen Winkels d c e von 360^0 berechnen lassen;



Figur 43.

also $360^0 - 220^0\ 13'\ 11'' = 139^0\ 46'\ 49''$.

Das Verhältniß der Winkel b c a und b c d in Figur 42 drückt man dadurch aus, daß man sagt: sie ergänzen sich zu zwei Rechten, das Verhältniß der vier Winkel um den Punkt c herum (Figur 43): sie ergänzen sich zu vier Rechten.

Die beiden Winkel b c d und a c e in Figur 43 heißen Scheitelwinkel, ebenso b c a und d c e.

Je zwei Scheitelwinkel sind sich immer gleich, b c d = a c e oder b c a = d c e.

§ 69.

Die Dreiecke.

Durchschneiden sich drei gerade Linien (Gerade!) in drei Punkten, so entsteht das Dreieck (Fig. 44). Nach der Größe der Seiten unterscheidet man gleichschenklige Dreiecke, wenn zwei Seiten einander gleich sind, oder gleichseitige Dreiecke, wenn alle drei Seiten gleich sind; ihnen gegenüber stehen die ungleichseitigen Dreiecke.

Nach der Größe der Winkel unterscheidet man rechtwinklige Dreiecke, in welchen ein Winkel ein rechter, stumpfwinklige Dreiecke, in welchen ein Winkel ein stumpfer, spitzwinklige Dreiecke, in welchen alle Winkel spitz sind.

In dem rechtwinkligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite Hypotenuse, die denselben einschließenden Seiten heißen Katheten.

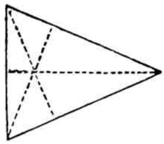
Für die Messungen sind folgende wichtige Sätze über die Dreiecke zu beachten:

In dem Dreiecke sind sämmtliche Winkel zusammen gleich zwei Rechten; sind deshalb zwei Winkel bekannt, so ergiebt sich der dritte durch Subtraction ihrer Summe von 180^0.

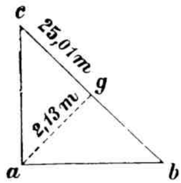
Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie (die dritte ungleiche Seite) einander gleich. Im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck ist jeder spitze Winkel = 45^0. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel gleich; jeder ist gleich $\frac{2}{3}$ Rechte = 60^0.

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse größer als jede Kathete, da in jedem Dreiecke immer dem größeren Winkel eine größere Seite gegenüber liegt. Ein über der Hypotenuse errichtetes Quadrat ist gleich der Summe der beiden über den Katheten errichteten Quadrate. (Pythagoräischer Lehrsatz!)

Unter Höhe eines Dreiecks ist das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Loth zu verstehen; dasselbe fällt, wie die nebenstehenden

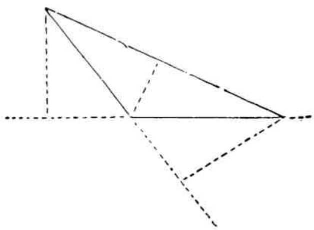


Figur 44.



Figur 45.

Figuren zeigen, da man jede Seite als Grundlinie annehmen kann, beim spitzwinkligen Dreieck (Figur 44) in jedem Falle in das Dreieck, beim rechtwinkligen Dreiecke (Figur 45) fällt nur das auf die Hypotenuse (c b) gefällte in das Dreieck; beim stumpfwinkligen Dreieck (Figur 46) bei den den stumpfen Winkel einschließenden Seiten außerhalb des Dreiecks, nur das Loth vom stumpfen Winkel aus fällt innerhalb.



Figur 46.

Der Inhalt eines jeden Dreiecks ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe dividirt durch 2, oder gleich der halben Grundlinie mal der Höhe oder gleich der halben Höhe mal der Grundlinie, z. B. in Figur 45.

$$J = \frac{ag \cdot bc}{2} = \frac{2{,}13 \cdot 25{,}01}{2} = \frac{53{,}27}{2} \text{ qm} = 26{,}60 = \text{rot. } 27 \text{ qm.}$$

§ 70.

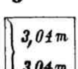
Die Vielecke.

Mehr als drei Grade schneiden sich in mehr als drei Punkten; je nach der Anzahl der sich schneidenden Linien erhält man Vierecke, Fünfecke, Achtecke ꝛc., wobei zu bemerken ist, daß die Zahl der Durchschnittspunkte oder Ecken genau der Zahl der Linien entspricht.

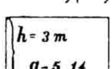
Am wichtigsten sind die Vierecke, welche nach der Beschaffenheit der Seiten und Winkel in folgende Arten zerfallen:

1) **Parallelogramme** — bei welchen je zwei gegenüberstehende Seiten parallel (||) sind:

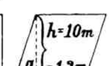
Hiervon giebt es nachstehende vier Arten:



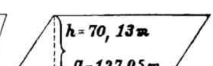
Figur 47.



Figur 48.



Figur 49.



Figur 50.

a. Das Quadrat, bei welchem alle Seiten gleich und alle Winkel rechte sind. (Figur 47.)
Inhalt = Grundlinie mal Höhe oder Seite mal Seite.
$= 3{,}04 \cdot 3{,}04 = 9{,}2416$ qm = rot. 9,242 qm.

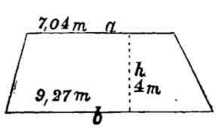
b. Das Rechteck, bei welchem nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel und alle Winkel rechte sind. (Figur 48.)
Inhalt = Grundlinie mal Höhe = dem Produkt zweier anstoßender Seiten.
$g \cdot h = 5{,}14 \cdot 3 = 15{,}42$ qm.

c. Der Rhombus (Raute), bei welchem alle Seiten gleich und die Winkel schiefe sind. (Figur 49.)
Inhalt = Grundlinie mal Höhe (Höhe = jeder beliebigen Senkrechten) zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten.
$g \cdot h = 12 \cdot 10 = 120$ qm.

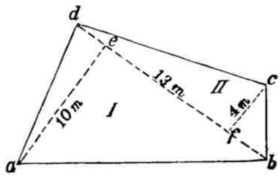
d. Das Rhomboid, bei welchem nur je zwei gegenüberliegende Seiten gleich und die Winkel schiefe sind. (Figur 50.)
Inhalt = Grundlinie mal Höhe.
$g \cdot h = 127{,}05 \cdot 70{,}13 = 8910{,}0165$ qm $= 8910{,}01$ qm.
$= 0{,}8910$ ha.

Merke: Bei allen Parallelogrammen ist der Inhalt gleich dem Produkt aus Grundlinie mal Höhe.

2) **Trapeze,** bei welchen nur zwei Seiten parallel sind. (Fig. 51.)



Figur 51.



Figur 52.

Inhalt = dem Produkt aus der halben Summe der beiden parallelen Seiten und der Höhe.

$$= \frac{a + b}{2} \cdot h = \frac{7{,}04 + 9{,}27}{2} \cdot 4 = 32{,}62 \text{ qm.}$$

3) **Trapezoide,** bei welchen kein Paar Seiten parallel sind. (Figur 52.)

Um den Inhalt zu berechnen, verbindet man zwei (beliebige!) gegenüberliegende Ecken, z. B. b und d durch die „Diagonale" b d und berechnet die so entstandenen beiden Dreiecke nach der bekannten Formel für sich und addirt die gefundenen Inhalte.

$$\text{z. B. } a\,b\,d = \triangle\,\mathrm{I} \cdot J = \frac{a\,e}{2} \cdot d\,b = 5 \cdot 13 = 65 \text{ qm}$$

$$b\,c\,d = \triangle\,\mathrm{II} \cdot J = \frac{c\,f}{2} \cdot d\,b = 2 \cdot 13 = 26 \text{ „}$$

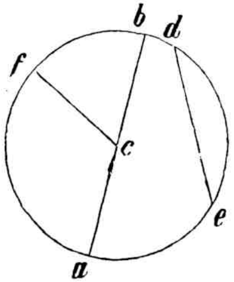
$$\text{Sa.} = 91 \text{ qm.}$$

Die Verbindungslinien von je zwei gegenüberliegenden Ecken in den Vier- und Vielecken heißen Diagonalen.

In jedem Vieleck beträgt die Summe sämmtlicher Winkel, wenn man dieselbe mit n bezeichnet, 2n—4 Rechte; die Anzahl sämmtlicher Diagonalen $\frac{n\ (n-3)}{2}$, im Siebeneck also $\frac{7\ (7-3)}{2} = 14$.

Den Inhalt eines Vielecks findet man, indem man dasselbe in Dreiecke, Parallelogramme oder Trapeze zerlegt, nach obigen Formeln die Inhalte der einzelnen Stücke berechnet und dieselben schließlich zusammen addirt (vergl. oben sub 3 und § 75).

Denkt man sich eine auf beiden Seiten begrenzte Linie in derselben Ebene um einen ihrer Endpunkte gedreht, so entsteht eine krumme Linie (Kreislinie), welche vom Drehpunkt (Mittelpunkt oder Centrum) überall gleich weit entfernt ist. Die Fläche heißt Kreis, jede Verbindungslinie zwischen Centrum und Kreislinie, auch Peripherie genannt, Halbmesser oder Radius; bilden zwei Halbmesser eine gerade Linie, so heißt diese Durchmesser. Jede Linie, die zwei Punkte der Peripherie verbindet, ohne durch das Centrum zu gehen, heißt Sehne.



Figur 53.

In Figur 53 ist a b ein Durchmesser, f c ein Radius, d e eine Sehne. Alle Radien desselben Kreises, ebenso alle Durchmesser sind unter sich gleich; der Radius ist die Hälfte des Durchmessers; alle Kreise mit gleichen Radien sind einander gleich. Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei Halbkreise. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang ist bei allen Kreisen ein ganz bestimmtes, nämlich = 1 : 3,14159 oder abgekürzt = 3,14 oder etwas ungenauer $\frac{22}{7}$. Diese Verhältnißzahl wird Pi genannt und π geschrieben. Hat man also den Durchmesser eines Baumes = 57 cm gefunden, so ist der Umfang = 57 · 3,14 = 178,98 cm. In gleicher Weise findet man den Durchmesser aus dem gemessenen Umfang durch Division mit 3,14. Nennt man den Radius = r, so ist der Umfang des Kreises = 2 r π und sein Inhalt = $r^2 \pi$ ($r^2 = r \cdot r$), z. B. r = 5 cm, so ist J = 25 · 3,14 = 78,50 □cm.

§ 71.

Vermessungen mit Instrumenten.

Flächen können nur wieder durch Flächen gemessen werden, deshalb nimmt man als Flächenmaaße die Quadrate der Längenmaaße; hat man eine Fläche z. B. mit einem Metermaaß vermessen, so wird die Fläche als Inhalt Quadratmeter haben, hätte man sie mit Ellen oder Fußen gemessen, so würde das Resultat Quadratellen oder Quadratfuße bilden u. s. w.

Um irgend welche Vermessungen von Flächen ausführen zu können, muß man Meßinstrumente haben. Diese bestehen in Meßketten oder Meßbändern resp. Meßlatten, den Signalstangen und den Winkelinstrumenten.

a. Instrumente zur Linienmessung.

Die **Meßkette** besteht aus 0,5 m langen mit abwechselnd größeren und kleineren Messingringen verbundenen Gliedern; zwischen je 10 solcher Glieder ist ein anders geformter Ring eingefügt und an beiden Enden ein Ring angebracht, um den Kettenstab durchstecken zu können.

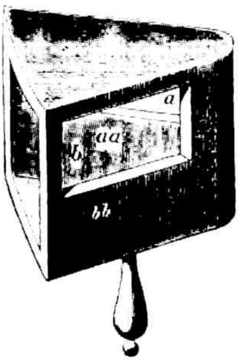
Die Ketten sind meist 10 oder 20 m lang.

Zum Gebrauch dieser Kette sind zunächst die etwa 1,5 m langen unten mit Eisenschuhen und einem Riegel versehenen **Kettenstäbe**, dann 10 etwa 1 Kettenglied lange unten spitze, oben mit einem Oehr versehene Stäbchen (**Zähler, Sticken**) nebst 2 **größeren Ringen** zum Transport derselben nöthig; ferner ein genau 5 halbe Meter langer mit Decimaltheilung versehener Stab — das **Anschlagmaaß** — zum Messen kleiner Linien, und endlich eine Anzahl 3—6 m langer roth und weiß angestrichener resp. mit roth und weißen Fähnchen versehener Stäbe — die **Signalstangen** —, **Meßfähnchen**.

In Preußen sind gesetzlich die aus dünnem Stahlblech mit genauer Metereintheilung versehenen und an einer hölzernen Kreuzscheibe aufrollbaren **Meßbänder** vorgeschrieben, die ebenso wie die Meßkette angewandt werden.

Die **Meßlatten** sind runde 5 m lange und entweder durch verschiedene Farben oder durch eingeschlagene Messingnägel (bei je 0,10 m 1 Nagel, 0,50 m 2 Nägel, 1 m 3 Nägel) eingetheilte Latten.

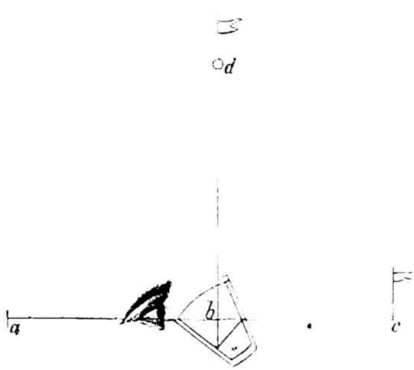
b. Instrumente zur Winkelmessung.



Figur 54.

Der **Winkelspiegel** wird zum Abstecken rechter Winkel gebraucht; seine Form ist aus nebenstehender Figur 54 ersichtlich. Das dreieckige, vorn offene Gehäuse hat in den Seitenwandungen oben bei a und b Visiröffnungen; unter demselben sind auf jeder Innenseite (durch aa und bb angedeutet) zwei kleine Spiegel angeschraubt, die genau unter einem halben rechten Winkel gegen einander geneigt sind.

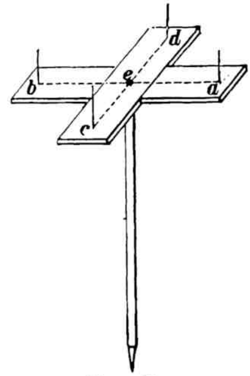
Um einen rechten Winkel auf einer Linie zu suchen, z. B. zum Punkt d außerhalb der Linie ac (Figur 55), stelle man sich auf dieselbe mit dem Gesicht nach c zu und halte den Winkelspiegel senkrecht so an die Nase, daß das eine Auge durch die vordere Oeffnung und die Visiröffnung b die in c stehende Meßfahne sieht. Geht man nun auf der Linie vorwärts nach dem Punkt b zu, so wird die Meßfahne bei d bald in dem unter der Visiröffnung b liegenden Spiegel erscheinen; je nachdem man nun vorwärts oder rückwärts geht, wird die sich spiegelnde Fahne bei d bald der anvisirten Fahne bei c sich nähern, bald wieder sich entfernen; in dem Augenblick jedoch, wo sie genau übereinander stehen, so daß die Fahne bei c die Verlängerung der



Figur 55.

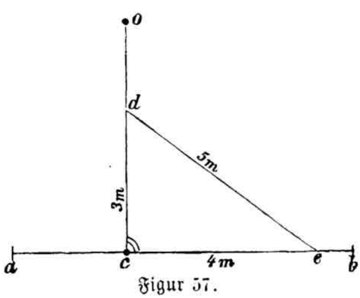
Fahne bei d zu sein scheint, hat man den rechten Winkelpunkt gefunden und läßt genau zwischen die beiden Füße und lothrecht unter dem Spiegel eine Signalstange einstecken; die Linie bd steht dann in b senkrecht auf ac.

Wie wir später sehen werden, ist das Abstecken von rechten Winkeln von der größten Wichtigkeit für die praktische Messung; der vorbeschriebene Winkelspiegel ist das handlichste und beste derartige Instrument, allerdings giebt es auf sehr weite Entfernungen nicht ganz so scharfe Resultate wie das im Uebrigen nicht so handliche Winkelkreuz, was in seiner einfachsten Form — die sich jeder leicht selbst herstellen kann — aus zwei etwa 30 cm langen, genau rechtwinklig zusammengenagelten Linealen (Figur 56) besteht, auf welchen wieder in genau gleichem Abstande von der Mitte des Kreuzes e und in genau rechten Winkeln zu einander Stifte a, b, c und d eingebohrt sind; zur bequemeren Handhabung wird das Kreuz auf einen mit eiserner Spitze versehenen Stock aufgesteckt oder aufgeschraubt. Durch kreuzweises Einvisiren von a nach b resp. von c nach d richtet man rechte Winkel, dagegen durch Visiren, z. B. von c nach e und b auch halbe rechte Winkel ein.



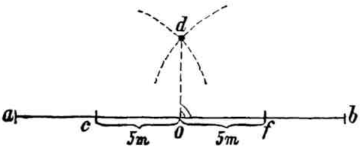
Figur 56.

Schließlich kann man auch auf die einfachste Weise durch Linienmessung sich rechte Winkel abstecken. Man haue drei ganz gerade dünne Stangen oder Latten von 3 m, 4 m und 5 m Länge, lege die 4 m lange Latte auf a b (Figur 57), auf welcher der rechte Winkel nach o zu bestimmt werden soll, etwa nach ce; in c lege man nach dem Augenmaaß im rechten Winkel die 3 m lange Latte nach dem Punkt o zu an, schließlich legt man die 5 m lange Latte so zwischen die Endpunkte d und e, daß die drei Latten ein festgeschlossenes Dreieck cde bilden, dann ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz (§ 69) cd senkrecht auf ce (resp. ab), da ja $3^2 + 4^2 = 5^2$ und man hat cd



Figur 57.

nur bis o zu verlängern; ebenso kann man auch das mehrfache von 3, 4 und 5 m nehmen, z. B. 9, 12, 15 m lange Stangen oder hanfene Schnuren, die Meßkette rc. Noch einfacher bei ganz kleinen Linien ist folgendes Verfahren:



Figur 58.

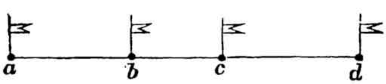
Auf der Linie ab soll in einem beliebigen Punkte, z. B. in o (Figur 58), eine Senkrechte errichtet werden; man messe von o nach a und b zu zwei gleiche Linien, z. B. je 5 m ab und bezeichne die gefundenen Punkte c und f mit Stäbchen; dann nehme man eine mehr als 5 m lange Schnur, befestige sie bei c und beschreibe einen Halbkreis, ebenso verfahre man bei f; der Schnittpunkt beider Halbkreise, z. B. bei d, steht im rechten Winkel zu o.

Um andere als rechte oder halbe rechte Winkel zu messen, giebt es noch verschiedene nach Graden eingetheilte complicirter construirte Winkelinstrumente, z. B. die Boussole, den Theodoliten u. s. w., deren Beschreibung hier übergangen wird.

§ 72.

Abstecken von Linien im Felde.

Gesetzt, die im Freien abgesteckte Linie a b (Figur 59) soll über b hinaus verlängert werden, so nehme man eine dritte Fahne in die Hand, gehe nach der Verlängerung etwa in c und visire, die Fahne senkrecht vor sich haltend, nach c und a hin; man verändert nun seinen Standpunkt so lange, bis alle drei Fahnen sich decken; ebenso hat man es mit d zu machen.



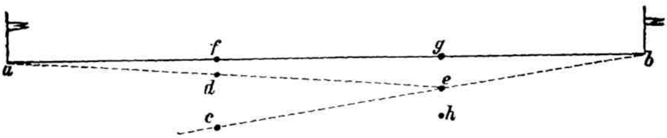
Figur 59.

Sollte nun zwischen den festen Punkten a und c ein Punkt b einvisirt werden, so schickt man, nachdem man sich in a oder c aufgestellt, einen Gehilfen in die Richtung des andern Punktes und visirt dessen Fahne nach dem anderen Endpunkte, immer mit der Hand nach rechts oder links winkend ein; decken sich die Fahnen, so macht man eine Handbewegung nach unten und die Fahne wird dort genau senkrecht eingesteckt; man vermeide hierbei möglichst alles Rufen, da Winken verständlicher ist.

Merke: Alle Signalstangen sind stets genau senkrecht einzustecken.

Eine gerade Linie über einen Berg abzustecken.

Gegeben sind die Punkte a und b (Figur 60); wegen eines Berges kann man weder von a nach b noch umgekehrt sehen; einige Zwischenpunkte (f und g) sind mit a und b in eine gerade Linie zu bringen.



Figur 60.

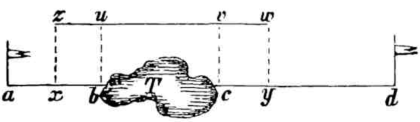
Man geht in Begleitung eines Gehilfen und mit einem Signal in der Hand in die vermeintliche Richtung der auszusteckenden Linie, etwa nach c und h, so daß man von c aus nach b und der Gehilfe von h aus nach a sehen kann; nun richtet man den Gehilfen von c aus nach b ein, so daß er nach e zu stehen kommt; dann richtet der Gehilfe nach a ein, so daß man nach d zu stehen kommt und so wird weiter fortgefahren, bis man schließlich von beiden Endpunkten Deckung hat und nach f und g gekommen ist, d. h. g f a und f g b in gerader Linie liegen. Hier werden die Signale eingesteckt.

§ 73.

Messung von geraden Linien.

Mißt man mit Kette oder Meßband, so sind dieselben zunächst zu revidiren, ob die Glieder nicht verschlungen sind oder das Band nicht verdreht ist; hierauf steckt jeder Kettenzieher seinen Endring an den Kettenstab und der vordere nimmt den Ring mit den 10 Zählern und geht in die Richtung der mit Signalstangen bezeichneten Linie; der hintere Kettenzieher setzt nun den Stab fest im Anfangspunkt ein und visirt mit Handbewegungen den vorderen so lange, bis dessen Stab genau mit dem nächsten Signal eingerichtet steht; der Punkt wird in der Erde markirt, die Kette mit beiden Händen am Kettenstabe gerade gewuchtet und dann dieselbe so straff als möglich am Stabe an dem betr. Punkt eingesteckt; dann holt man einen Zähler, nimmt die Kette heraus und steckt denselben genau in das Loch, tritt einen Schritt seitwärts und geht weiter; hat der hintere Kettenzieher den Zähler erreicht, so ruft er laut: „Halt“, setzt seinen Stab an die Stelle des Zählers und hängt letzteren an seinen Ring; soviel Zähler er am Ringe hat, soviel ganze Kettenlängen sind gemessen; der Rest wird an den Gliedern abgezählt. Beim Wechseln der Zähler, wenn alle 10 abgegeben sind, ist genau aufzupassen, auch zu beachten, ob nicht ein Zähler verloren ist; in letzterem Fall muß die Linie von Neuem gemessen werden.

Befinden sich kleine Hindernisse in der abzumessenden Linie, durch welche man nicht hindurchmessen kann, z. B. Gebäude, kleine Teiche, starke Bäume u. s. w., so verfährt man wie folgt: In nebenstehender Figur 61 liege in a d ein Teich T; dann nehme man am Ufer etwa bei b sowie etwa 20 m vorher, etwa bei x mit dem Instrument nach derselben Seite rechte Winkel mit den genau gleich langen Schenkeln x z und b u, die so lang sein müssen, daß man bequem an dem Ufer vorbei visiren kann; hierauf errichtet man hinter dem Teiche etwa in c und y entweder wie vorher die mit x z und b n gleich langen Lothe c v und y w oder noch einfacher, man verlängert die Verbindungslinie z u durch Einvisiren über u hinaus soweit wie der Teich lang ist, z. B. bis v, und nehme dann einen rechten Winkel nach a d hinüber = v c als Controllinie; dieselbe muß genau ebenso lang sein als b u, wenn man richtig eingerichtet hat. Nun mißt man u v resp. z w, welche Linien als Parallelen zwischen Parallelen selbstverständlich genau so lang sein müssen als b c resp. x y.



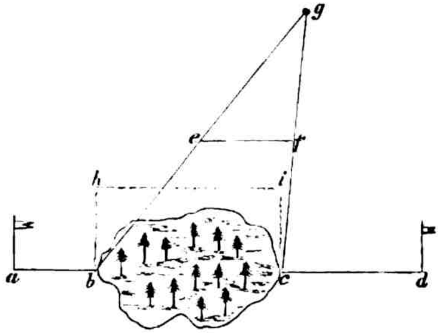
Figur 61.

Aus Obigem ist leicht ersichtlich, daß man durch Messung der parallelen Linie fast jedes Hinderniß in der Messung umgehen kann, sowie, in welcher Weise man die Parallellinien construirt; man legt einfach an den geeigneten Punkten rechte Winkel mit genau gleich langen Schenkeln an und verbindet deren Endpunkte durch eine Linie.

Bei sehr großen Hindernissen wird das Verfahren jedoch ungenau, weil das Abstecken der rechten Winkel mit sehr langen Schenkeln zu ungenau wird.

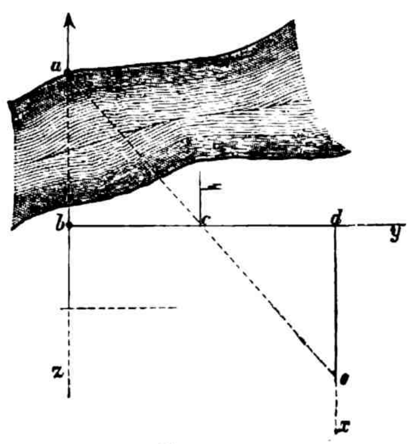
Für den Fall, daß auch die Parallellinie nicht zu übersehen ist (u v in Figur 61), verfährt man wie folgt:

In der Linie a d liegt ein unzugänglicher mit hohen Bäumen dicht bestandener Sumpf, dessen Länge b c (Figur 62) in a d direkt nicht zu messen ist. Aus irgend einem Grunde, z. B. weil kein Winkelinstrument vorhanden, kann die bequemere Parallellinie h i nicht gewählt werden; dann suche einen Punkt seitwärts, von dem du aus nach b und nach c hin sehen kannst, etwa g, miß g b und g c, theile die gefundenen Maßzahlen durch dieselbe beliebige Zahl, z. B. 5, und miß die gefundenen Zahlen von g aus auf g b und g c ab, etwa g e und g f, und miß dann die Linie e f; sie wird ebenfalls gleich sein $1/_5$ von b c, mithin die gesuchte Linie b c = 5 mal e f sein; z. B. g b = 100 m g c = 80 m; dividirt durch 5 giebt $\frac{100}{5} = 20$ und $\frac{80}{5} = 16$, mithin g e = 20 m und g f = 16 m; e f gemessen = 15 m, mithin b c = 5 · 15 oder 75 m.



Figur 62.

Für den Fall, daß von der direkt nicht meßbaren Linie a b (Figur 63) nur der Punkt b zugänglich ist, weil zwischen a und b ein Hinderniß, z. B. ein unüberschreitbarer Fluß liegt, so lege zu der Visirlinie a b den rechten Winkel in b und trage auf einem beliebigen Punkt des Lothes b y, z. B. von c aus, die genau gleich langen Linien b c und c d ab und lasse in c eine Meßfahne aufstellen; dann nimm zu b d in d wiederum einen rechten Winkel und suche auf d x einen Punkt, etwa e, von dem du über c hinweg a sehen kannst, dann ist d e genau



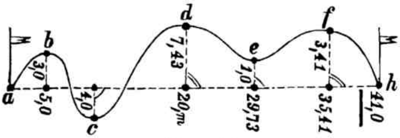
Figur 63.

so lang als ab; sollte von b aus wegen Terrainhindernissen ein Loth auf ab nicht möglich sein, so kann natürlich auch jeder beliebige Punkt in der Verlängerung von ab nach z zu, soweit bis das Loth genommen werden kann, gewählt werden.

§ 74.

Messung von krummen Linien.

Jede krumme Linie verwandelt man dadurch, daß man an den Hauptkrümmungspunkten Pfähle einschlägt, z. B. a, b, c, d, e (Fig. 64), in eine gebrochene Linie, indem man annimmt, daß die zwischen den Eckpunkten a, b, c u. s. w. liegenden Linien ab, bc u. s. w. gerade sind; man hat dann nur von Punkt zu Punkt zu messen, um die Größe der Linie zu finden; eine derartig gemessene Linie kann man jedoch nicht in Karten eintragen, z. B. Grenzlinien, dazu verfährt man wie folgt:



Figur 64.

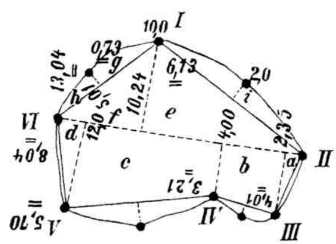
Man visirt zunächst zwischen den Endpunkten a und h die gerade Linie aus und vermißt dieselbe; sobald man zu den seitwärts liegenden und vorher bezeichneten Brechungspunkten b, c, d u. s. w. in rechte Winkel kommt, was mit dem Winkelspiegel resp. Winkelkreuz, bei unwichtigeren Messungen allenfalls auch nach dem Augenmaaß festzustellen ist, so bezeichnet man den Fußpunkt des Lothes mit seiner Maaßzahl in ah, z. B. bei dem Loth b mit 5 m, und mißt mit dem kleinen Abschlagsmaaß das Loth nach b und trägt dessen Maaß ein; wie aus der Zeichnung ersichtlich, entweder unter das Loth oder auch an dessen Endpunkt; kommen in kleinen Zeichnungen zu viel Zahlen dicht neben einander, so daß Platz fehlt, so macht man einen längeren Haken seitwärts und schreibt an dessen Endpunkt die betreffende Zahl. Ebenso verfährt man bei allen anderen Punkten; der Punkt, von wo aus man in ah abgelothet hat, ist stets mit einem Signal genau zu markiren, damit man ihn schnell und sicher wiederfindet, wenn man weiter messen will. Um nun zu bezeichnen, welche Winkel mit dem Instrument, welche nach dem Augenmaaß genommen wurden, macht man bei ersteren am Fußpunkte zwei, bei letzteren nur ein Häkchen (vergl. die Figur). Ist die Linie fertig gemessen, so unterstreicht man die letzte Maaßzahl.

Zur **Kartirung** hat man dann nur die gerade Linie auf Papier zu bringen, die Maaße auf dieser, der sog. „Constructionslinie“, mit Cirkel und Maaßstab abzugreifen und mittelst rechtwinkliger Dreiecke resp. des Transporteurs von den Fußpunkten aus die Lothe einzutragen und deren Maaße auf denselben wie vor abzugreifen. Die Verbindungslinie der Lothendpunkte ist die krumme Linie.

§ 75.

Vermessung eines Grundstücks.

Soll irgend eine Vermessung vorgenommen werden, so muß man sich zunächst die vorhandenen Karten verschaffen und die auf diesen festgelegten Grenzen in der Natur abstecken, indem man das Grundstück umgeht, die krummen Grenzen möglichst zu Geraden ausgleicht und an den angenommenen Eckpunkten nach der Reihenfolge numerirte Pfähle einschlägt. Hierauf entwirft man sich eine möglichst getreue Handzeichnung. Nun sucht man sich durch das Grundstück eine möglichst bequeme Constructionslinie, z. B. von Pfahl II bis Pfahl VI (in Fig. 65) auszufluchten, die so gewählt wird, daß man von ihr nach allen Grenzpfählen am bequemsten messen und sehen kann. Ist dies geschehen, so fängt man z. B. von II an zu messen und bezeichnet mit Hilfe des Winkelspiegels oder Winkelkreuzes den Punkt auf Linie II bis VI,



Figur 65.

der zu Pfahl III im rechten Winkel liegt; nachdem man die Maaßzahl des Punktes notirt, mißt man nach Pfahl III hinüber, während dessen auf der Hauptlinie an dem Punkte, von dem man abmißt, ein Signal sehr genau eingesteckt wird. In gleicher Weise macht man es mit den übrigen Pfählen IV, I und V. Alle diese Constructionslinien werden nur gestrichelt; auf die eben angegebene Weise hat man sich das Grundstück in 4 Dreiecke und 2 Trapeze zerlegt, deren Inhalte man nach den bekannten Formeln unter Zugrundelegung der gefundenen Maaßzahlen für Grundlinie und Höhe, wie aus unten stehender Berechnung ersichtlich, berechnet und zusammen addirt, um den ganzen Inhalt zu finden. Ist das Grundstück von krummen Linien begrenzt (siehe Figur 65), so steckt man an den stärkeren Krümmungspunkten ebenfalls Pfähle ein, mißt das größte in dasselbe beschriebene Vieleck und legt in derselben Weise, wie dies bereits mit den Eckpunkten von der Hauptconstructionslinie aus geschah, die Hauptkrümmungspunkte von den Verbindungslinien aus unter rechten Winkeln fest (schneidet oder bindet sie ein!).

Beispiel zu Figur 65.

Berechnung des Flächeninhalts			Figur	Product qm
a = 2,35 . 4,01	b = 4,01	c = 3,12		
235	3,12	5,70	a	9
940	7,13 . 1,65 (4,0—2,35)	8,82 . 8 (12 — 4)		
9,4235 = rot. 9	3565	70,56 = rot. 71	b	12
	4278		c	71
	713			
	11,7645 = rot. 12		d	6
d = 5,70 . 1,04	e = 10,24 . 6,13	f = 10,24 . 2,80 (13,04—10,24)	e	63
2280	3072	8192		
570	1024	2048	f	29
5,9280 = rot. 6	6144	28,6720 = rot. 29		
	62,7712 = rot. 63		g	4
g = 5,01 . 0,73	h = 0,73 . 3,03 (8,04—5,01)	i = 10,0 . 2,0	h	2
1503	219	20		
3507	219		i	20
3,6573 = rot. 4	2,2119 = rot. 2.			
		Summa		216

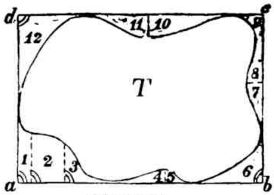
dividirt durch 2 = 108
J = 108 qm = 0,0108 ha.

NB. Der ganze Bogen i ist nur als ein Dreieck berechnet und die übrigen Bogen zwischen III/IV, IV/V und V/VI bleiben wegen ihrer Geringfügigkeit außer Berechnung.

Die auf diese Weise erhaltenen neuen Figuren berechnet man als Dreiecke für sich, indem man die nur wenig gekrümmten Linien als Gerade annimmt; ganz schwache Krümmungen, z. B. von II nach III oder V nach VI, betrachtet man als Gerade und läßt sie, falls nicht größere Genauigkeit erforderlich, außer Acht, da sie bei ihrer Ausmessung doch nur äußerst kleine Dreiecke geben würden! — schließlich addirt man alle Inhalte zum Inhalt des Vielecks.

Um eine Karte von dem so gemessenen Grundstücke anfertigen zu können, trägt man die Constructionslinien II—VI auf ein Kartenblatt und greift nach dem gewünschten oder vorgeschriebenen verjüngten Maaßstabe, z. B. 1:5000 oder 1:2500, den man sich bei jedem Mechaniker kaufen und von dem man sich zugleich über seine Anwendung belehren lassen kann, die Linien auf Grund der Handzeichnung nach den Maaßen genau so ab, wie man sie draußen gemessen hat. Die Verbindungslinien der Grenzpunkte geben schließlich das Bild des Grundstücks auf der Karte.

Den Flächeninhalt des Teiches T zu bestimmen, der in seinem Inneren direkt nicht meßbar ist (Figur 66).

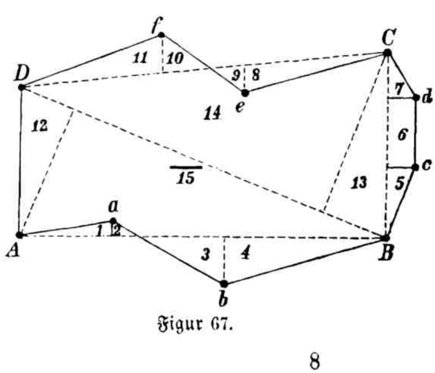


Figur 66.

Man visirt die das Ufer berührende Linie a b aus und errichtet in a und b Senkrechte, welche die Ufer ebenfalls berühren, in d errichtet man wiederum nach b c zu eine das Ufer berührende Senkrechte d c; den Inhalt des so um den Teich construirten kleinsten Rechtecks berechne aus dem Produkt von a b . a d; dann errichte von sämmtlichen Umfangslinien auf alle Krümmungspunkte Senkrechte, wodurch die Dreiecke und Trapeze 1 bis 12 entstehen. Nachdem auf bekannte Weise ihre einzelnen Inhalte berechnet und addirt sind, zieht man den Gesammtinhalt von dem vorher berechneten Inhalt des Umfassungsrechtecks ab und erhält in der Differenz den gesuchten Flächeninhalt des Teiches T.

Hat man größere Flächen zu vermessen, bei denen die Senkrechten von der durch dieselbe zu legenden Constructionslinie aus vielfach zu lang werden würden oder wenn die Grenzlinien sehr viele Krümmungspunkte haben, so legt man noch Hilfsconstructionslinien an, z. B.: die große Brandfläche A a b B c d C e f D (Figur 67) ist genau mit Kette und Winkelspiegel zu messen.

Construire das der Grenzlinie möglichst nahe liegende Viereck A B C D durch Signale, miß die Constructionslinie B D mit den Senkrechten nach C und A (um das Viereck auftragen zu können); dann miß A B, B C und C D mit sämmt-



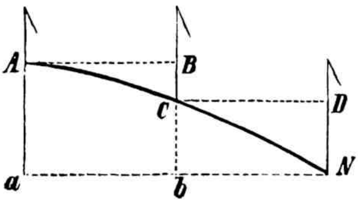
Figur 67.

lichen Senkrechten nach den vorher bezeichneten Krümmungspunkten und berechne die entstandenen Figuren.

Zunächst berechne das Viereck A B C D aus 12 + 13 + 14 + 15; hierzu sind zu addiren 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 10 + 11 und zu subtrahiren 1 + 2 + 8 + 9, um den gesuchten Flächeninhalt zu finden.

Aus obigen beiden Beispielen ist zu ersehen, wie man in schwierigeren Fällen sich leicht durch Construction praktischer Hilfslinien helfen kann.

Zum Schluß sei noch hervorgehoben, daß man auf geneigtem Boden nicht die geneigte Linie, sondern die bezügliche Horizontale zu messen hat, indem man das Meßband ꝛc. stets wagerecht hält und vom Endpunkte durch ein Loth den Punkt auf der Erde bestimmt, von dem man aus wieder die Wagerechte anlegen kann u. s. w., wie dies aus nebenstehender Figur 68 ersichtlich ist. Man nennt diese Art Messung „Staffelmessung".

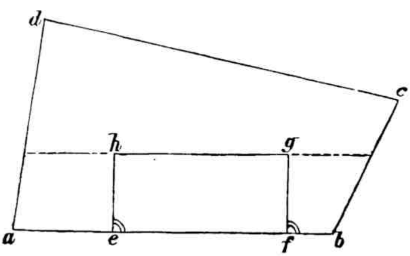


Figur 68.

§ 76.

Das Theilen der Figuren. (Feldertheilungslehre.)

Bei Abgrenzung von Kulturflächen, von Schlägen, Austausch von Grundstücken, bei Verpachtungen kommt der Forstmann öfter in die Lage, von größeren Flächen kleinere Flächen von einem bestimmten Inhalt abgrenzen zu müssen. Wie hierbei zu verfahren, wird am besten aus den folgenden Beispielen klar werden.

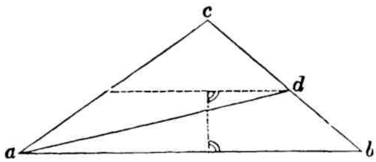


Figur 69.

In Figur 69 soll von a b c d an Seite a b und zwar an den Punkten e und f ein Rechteck von 105,8 qm Größe abgetheilt werden.

Miß e f = 23 m, dividire 105,8 durch 23, um die Höhe 4,6 m zu erhalten, errichte die Senkrechten e h und f g von je 4,6 m Länge und ziehe h g, so ist e f g h = 105,8 qm, denn Höhe = 4,6 m mal Grundlinie = 23 m = 105,8 qm.

In Figur 70 soll von a b c ein Dreieck von 58,8 qm abgetrennt werden.



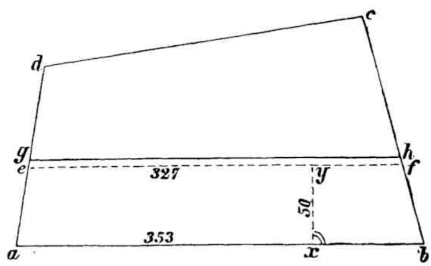
Figur 70.

Miß zunächst a b = 29,4 m, multiplicire die gesuchte Fläche 58,8 qm mit 2 und dividire das Produkt 117,6 mit 29,4 = 4 m, welches die Höhe des gesuchten Dreiecks sein muß, da

$$J = g \cdot \frac{h}{2} = 58{,}8 \text{ oder } 29{,}4 \cdot \frac{h}{2} = \frac{2 \cdot 58{,}8}{29{,}4} = 4.$$

In einem beliebigen Punkte von a b errichte nun eine 4 m lange Senkrechte und nimm von ihrem Endpunkte wieder eine Senkrechte nach einer Dreiecksseite — etwa nach d, verbinde a d, so ist a d b das gesuchte Dreieck von 58,8 qm Größe, da $\frac{\text{Grundlinie mal Höhe}}{2} =$ 58,8 qm.

In Figur 71 soll von a b c d an a b eine Kulturfläche in Form eines Trapezes von 17616 qm abgegrenzt werden.



Figur 71.

Diese Aufgabe läßt sich genau nur mit Hilfe der höheren Mathematik lösen, in der Praxis verfahre man nach folgender Näherungsmethode:

Miß a b = 353 m und dividire mit 350 in 17616 = 50 m; bei zusammenlaufenden Trapezseiten wie hier nimmt man die Meßzahl etwas knapper — hier also etwa nur 350 als Divisor — bei auseinanderlaufenden etwas reichlich (356). Diese 50 m trägt man als Senkrechte auf a b = x y ab und nimmt auf x y von y aus die Senkrechten auf a d und b c zu, welche Linie = e f = 327 m Länge man mißt; nun ist $a\,b\,e\,f = \frac{353 + 327}{2} \cdot 50 = 17000$ qm, also um 616 qm zu klein; nun ist 327 in 616 = etwa 2 m, um welche x y zu verlängern ist, um das ziemlich genau 17616 qm große Trapez a b h g zu erhalten. Hat man beim ersten Versuch eine zu große Fläche erhalten, so ist das Loth und die Fläche in gleicher Weise zu verringern.

8*

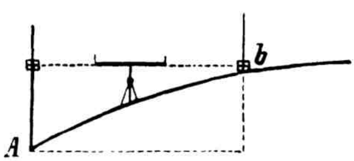
§ 77.

Nivelliren oder Abwägen des Bodengefälls.

Bei der Ziehung von Gräben, beim Bau von dauernden Wegen in den Revieren ꝛc. kommt der Forstmann öfter in die Lage, das Gefäll des Bodens ermitteln zu müssen. Zunächst muß man die abzuwägende Linie durch fortlaufende nummerirte Pfähle in gleichlange Stationen eintheilen. Neben die Stationspfähle schlägt man über dem Boden kleine Pfähle ein, die alle gleich hoch über dem Boden hervorragen und untersucht dann durch Horizontalvisiren, um wieviel von je 2 Pfählen der eine höher im Terrain steht als der andere; aus der Schlußberechnung aller Stationshöhenunterschiede findet man den Höhenunterschied des Anfangs- und Endpunktes der zu nivellirenden Linie. Bei kürzeren Linien sind natürlich keine Stationen nöthig.

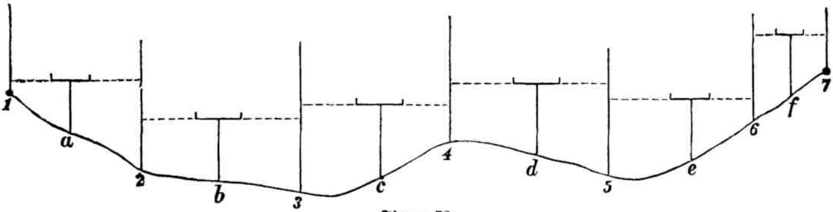
Da die genaue Beschreibung des Verfahrens zu viel Raum erfordern würde, so sei nur soviel erwähnt, daß zwischen je zwei Stationspunkten ein Nivellirinstrument zum Horizontalvisiren (Kanalwage, Setzwage, Libellenfernrohr ꝛc.) in genau wagerechter Richtung, auf den Pflöcken der Stationen eine mit Meter- und Centimetereintheilung versehene sogenannte Nivellirlatte genau senkrecht aufgestellt wird und man nun die Latten anvisirt und den anvisirten Punkt auf der Latte durch einen beweglichen Schieber, dessen Auf- und Abwärtsschieben man dem Gehilfen durch Handzeichen angiebt, festlegt. Bei Fernrohrinstrumenten kann man mittelst des Fadenkreuzes in denselben sofort den Punkt auf der Latte selbst ablesen.

Hat man z. B. die Höhe des Visirpunktes der Latte in A = 2,75 m gefunden (siehe Figur 72), so läßt man in derselben Weise die Latte in b aufstellen, visirt und findet die Höhe des Punktes in b = 0,24 m; der Höhenunterschied der Punkte A und b würde = 2,75 — 0,24 = 2,51 m oder das Gefäll von b nach A = 2,51 m betragen.



Figur 72.

Da man immer in der Mitte der ersten Station anfängt und stets rückwärts und vorwärts visiren muß, so nennt man die Lattenhöhen, die nach dem Anfangspunkt der Messung liegen, die hinteren, die entgegengesetzten die vorderen Lattenhöhen, das Schlußresultat, d. h. den Höhenunterschied vom Anfangs- und Endpunkt erhält man, indem man alle vorderen, ebenso alle hinteren Lattenhöhen zusammen addirt und die Summe der vorderen von der Summe der hinteren Lattenhöhen abzieht. Das Steigen bezeichnet man mit + (Plus), das Fallen mit — (Minus) vor der Zahl. Die nähere Ausführung eines Nivellements wird aus folgendem Beispiel ersichtlich:



Figur 73.

Es ist in Figur 73 der Höhenunterschied zwischen Punkt 1 und 7 festzustellen; die Linie 1—7 wird zunächst in der Entfernung von je 30 m in die Stationen 2, 3, 4 u. s. w. getheilt, die mit nummerirten Pfählchen und dicht daneben mit bis an den Boden eingeschlagenen Pflöcken zum Aufstellen der Nivellirlatte besetzt werden. Dann stelle das Instrument in a, die Nivellirlatte genau senkrecht in 1 auf und visire nach 1; hierauf geht der Gehilfe mit der Latte nach 2 und man visirt vorwärts nach 2; hierauf gehe mit dem Instrument nach b und visire erst rückwärts nach 2 und — nachdem der Gehilfe vorwärts nach 3 gegangen ist — auch nach 3 und so fort — bis das Instrument auf allen übrigen Zwischenpunkten c d e und f nach rückwärts und vorwärts visirt hat; nur zuletzt visirt man vorwärts. Die Maaße trage in folgende Tabelle ein:

Stationspunkt	Rückwärts visirt cm	Vorwärts visirt cm	Bemerkungen	
a	4,12	30,20		Vorwärts = 132,94 cm
b	10,50	14,10		Rückwärts = 90,71 „
c	25,13*	18,14	*Teichufer	also Steigung: 42,23 cm
d	22,10	26,10		NB. Sollte das Rückwärtsvisiren eine größere Summe ergeben als das Vorwärtsvisiren, so findet natürlich Senkung statt.
e	28,86	24,30*	*Grabensohle	
f	—	20,10		
Summa	90,71	132,94		

Die Länge der Stationen richtet sich nach dem Instrument; je weiter man visiren kann, desto länger nimmt man die Stationen.

Um das Gefäll in Procenten angeben zu können, hat man einfach folgende Proportion anzusetzen: gesetzt, daß die Stationslängen 75 m betragen, z. B. die Stationslänge = 75 m, Gefäll = 1,27 m:

auf 75 m Länge = 1,27 m Gefäll
„ 100 „ „ = x

$$75 : 100 = 1{,}27 : x$$

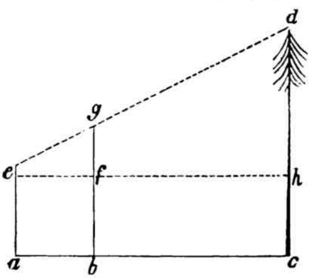
$$x = \frac{1{,}27 \, . \, 100}{75} = 1{,}69\ \%.$$

Das Kartiren eines Nivellements geschieht in der Weise, daß man auf dem Kartenblatte eine horizontale Linie anlegt, auf dieser die Stationen nach dem Maaßstabe aufträgt und das Steigen und Fallen auf auf den Stationspunkten errichteten Senkrechten abgreift und die abgegriffenen Punkte schließlich verbindet. Die Horizontale ist zu orientiren.

§ 78.

Höhenmessen.

Das Messen von Höhen kommt in der Praxis zur Ermittelung des Massengehaltes stehender Bäume und ganzer Bestände häufig vor. Das gebräuchlichste Instrument dazu ist der Faustmann'sche Spiegel-hypsometer*), welcher aus einem Brettchen mit einer Visirvorrichtung und einem kleinen Pendel besteht; hat man die Spitze des Baumes anvisirt, so kann man mit Hilfe eines kleinen Spiegels die Höhe des Baumes direkt ablesen; sie wird durch den Faden des Pendels an der Skala des Brettchens, deren Theilstriche mit entsprechenden Zahlen versehen sind, markirt.



Figur 74.

Einfacher kann man die Höhe eines Baumes nur mit Hilfe eines Stabes messen, wie aus Figur 74 ersichtlich:

Man mißt den Stab a e = 1,5 m, den Stab b g = 2 m, steckt g b soweit vom Baum c d in die Erde, als man ihn ohngefähr hoch schätzt und so, daß man d sehen kann; dann schickt man einen Gehilfen mit a e soweit zurück, bis er über g hinaus d anvisiren kann, hier wird a e in den Boden

*) Zu beziehen für 6 Mark von Frau Oberförster Faustmann, Babenhausen im Großherzogthum Hessen. Praktischer, aber theurer (12 Mark) ist der Weise'sche Hypsometer (Mechaniker Buddendorf, Berlin, Schützenstr. 57).

gesteckt; dann visirt man noch senkrecht auf g b und c d und läßt die Punkte f und h mit Kreide bezeichnen.

Schließlich sind zu messen z. B. a b = 1 m, a c = 26 m, g f = 0,5 m, c h = 1,5 m; dann verhalten sich zunächst im Dreieck e h d = e f : f g = e h : h d, oder da e f = a b und e h = a c ist, wie

a b : f g = a c : h d oder die gemessenen Zahlen eingesetzt:

1 m : 0,5 m = 26 m : h d

$$\frac{0{,}5 \,.\, 26}{1} = \text{hd}$$

13 = „ hierzu ist noch h c = 1,5 m zu addiren, mithin d c = 14,5 m.*)

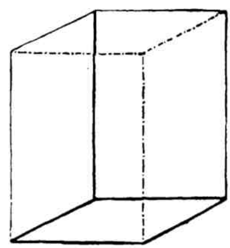
Hat man die Durchschnittshöhe eines Bestandes zu ermitteln, so mißt man die Höhen mehrerer Normalbäume und nimmt daraus das Mittel, bei ungleichaltrigen Beständen bildet man Höhenklassen und schätzt oder mißt die einzelnen Stämme in diese ein. Hat man an Berghängen Baumhöhen zu messen, so muß man sich in horizontaler Entfernung aufstellen, nicht ober- oder unterhalb des zu messenden Baumes.

§ 79.

Vermessung von Körpern oder Stereometrie.

Unter Körper versteht man jeden nach allen Seiten hin von ebenen oder krummen Flächen oder von beiden zusammen begrenzten Raum.

Ein Körper, der von zwei parallelen Grundflächen und so viel Parallelogrammen, als die Grundflächen Seiten haben, eingeschlossen ist, heißt **Prisma oder Säule** (Figur 75). Je nachdem die Grundflächen Drei-, Vier-, Fünf- ꝛc. Ecke sind, ist das Prisma ein drei-, vier-, fünf- ꝛc. seitiges. Die Höhe des Prismas ist die Senkrechte zwischen beiden Grundflächen. **Der Inhalt ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.** Je nachdem die **Seitenflächen senkrecht oder schief** auf den Grundflächen stehen, unterscheidet man **gerade**

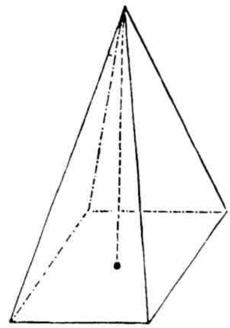


Figur 75.

*) Ein weit einfacheres Verfahren ist folgendes: „Man nimmt einen Stock von eigener Körperlänge, legt sich soweit vom Stamm ab auf die Erde, als man den Stamm hoch schätzt und steckt den Stock zwischen seine Füße; nun rutscht man, die Baumspitze immer über die Stockspitze anvisirend, so lange hin und her, bis Auge, Stockspitze und Baumspitze genau in einer geraden Linie liegen. Dann ist die Entfernung vom Baum bis zum Auge gleich der Höhe des Baumes."

und schiefe Prismen; ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so heißt das Prisma Parallelepipedon; sind die Grund- und Seitenflächen Quadrate, so heißt das Prisma Würfel.

Figur 76.

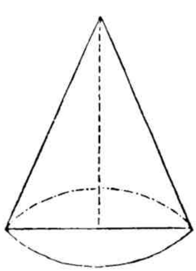


Figur 77.

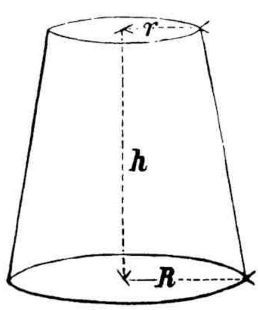
Ein gerades Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, nennt man Cylinder oder Walze. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundflächenkreise heißt Axe und ist gleich der Höhe und Länge des Cylinders. Der Inhalt ist ebenfalls gleich Grundfläche mal Höhe (Figur 76).

Ein Körper, dessen Grundfläche ein Drei-, Vier-, Fünf- 2c. Eck ist und der von ebenso vielen Dreiecken eingeschlossen wird, als die Grundfläche Seiten hat, heißt Pyramide (Figur 77). Eine Senkrechte aus der Spitze auf die Grundfläche bildet die Höhe. Man unterscheidet nach der Seitenzahl der Grundfläche 3-, 4-, 5- 2c. seitige Pyramiden.

Besteht die Grundfläche der Pyramide aus einem Kreis, so heißt der Körper ein Kegel (Figur 78). Der Inhalt von



Figur 78.



Figur 79.

Pyramide und Kegel ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe dividirt durch 3.

Legt man in einem Kegel durch einen Punkt der Höhe einen Schnitt parallel zur Grundfläche, so entsteht der abgestumpfte Kegel (Figur 79), dessen Inhalt (J), wenn man den Radius des oberen Kreises mit r, den des unteren mit R und die Höhe mit h bezeichnet, gleich ist:

$$J = (R^2 + Rr + r^2) \frac{\pi \,.\, h}{3};$$

sind z. B. durch Messung mit der Kluppe für den Durchmesser eines so gestalteten Baumabschnittes gefunden: unterer Durchmesser = 80 cm, oberer Durchmesser = 40 cm, Länge des Abschnitts = 100 cm (h), so würde sich aus obiger Formel ergeben (R und r = $\frac{1}{2}$ der Durchmesser).

$$(40^2 + 40 \,.\, 20 + 20^2) \,.\, \frac{3{,}14 \,.\, 100}{3} = 2800 \,.\, 104{,}66$$
$$= 2800 \,.\, 105 \text{ (abgekürzt)}$$
$$= 294000 \text{ Kubikcentimeter} = 0{,}294 \text{ cbm.}$$

Diese Methode ist auch anzuwenden, wenn man ohne Tafeln den Inhalt eines Baumstammes ermitteln will. Einfacher ist jedoch, wenn man nur den halben mittleren Durchmesser mit sich selbst multiplicirt und die gefundene Quadratzahl mit 3,14 und dieses Produkt mit der Länge des Stammes multiplicirt.

§ 80.

Berechnung von prismatischen Körpern.

Die Einheit des Körpers, mit welchem alle Körper gemessen*) werden, ist der Würfel oder Cubus, d. h. ein vierseitiges gerades Prisma, dessen sämmtliche Flächen Quadrate sind. In Deutschland ist als Einheitsmaß der Kubikmeter vorgeschrieben, also ein Würfel, dessen Länge, Breite und Höhe = 1 Meter ist; Körper, die kleiner als 1 Kubikmeter sind, werden in Decimalbruchtheilen desselben ausgedrückt.

*) Linien wurden mit Linien, Flächen mit Flächen gemessen, Körper können ebenfalls nur mit Körpern gemessen werden. Zum Ausmessen der Flächen nehmen wir das Quadrat (Quadratmeter), zum Ausmessen der Körper wählen wir den Würfel (vergl. § 79) des Kubikmeter.

Ein Holzschichtmaaß ist z. B. solch ein vierseitiges Prisma, dessen Inhalt durch Multiplikation der Maaßzahlen von Länge, Breite und Höhe gefunden wird.

Ist ein Schichtmaaß z. B. 4,00 m lang, 1,75 m breit und 2,63 m hoch, so beträgt der Inhalt

$$4{,}00 \,.\, 1{,}75 \,.\, 2{,}63 = 18{,}410 \text{ Kubikmeter.}$$

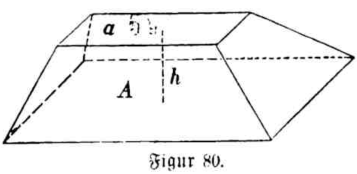
Um die Höhe eines Schichtmaaßes oder irgend eine andere Dimension zu finden, wenn der Inhalt und zwei andere Dimensionen gegeben sind, hat man einfach mit dem Produkt der bekannten Dimensionen in den Inhalt hineinzudividiren: Wäre z. B. gefragt, wie hoch wird ein Schichtmaaß von 18,41 Kubikmeter Inhalt, 4 Meter Länge und 1,75 Meter Breite aufgesetzt, so würde man dies finden, wenn man mit 4,00 . 1,75 rot. 7,00 in 18,41 hineindividirte; man erhält wie oben 2,63 Meter, mithin müßte das Schichtmaaß 2,63 Meter hoch gesetzt werden. Für die Praxis merke folgende aus Obigem leicht ersichtliche Regel: „Man erhält die gesuchte dritte Dimension am schnellsten, wenn man mit dem Produkt der beiden bekannten Dimensionen in 10,000 dividirt.“ Z. B. die Kiefernknüppel sollen im Jagen 88 c 83 cm lang und in Schichtmaaßen von 1—4 m ausgehalten und 1,3 m hoch gesetzt werden; wie breit sind sie zu setzen?

1,3 . 0,83 | 10,000 | = 92,7 = rot. 93 cm, mithin ist das Schichtmaaß von 1 m = 93 cm breit, von 2 m = 186 cm breit u. s. w. aufzusetzen. Probe: 1,3 . 0,83 . 0,93 = 1,0035 rm rot. 1,00 rm.

Werden Schichtmaaße an Berglehnen aufgesetzt, so muß die Entfernung der Stützen stets horizontal gemessen werden, worauf streng zu halten ist.

In ähnlicher Weise werden die Inhalte von Gräben als prismatische Körper berechnet, ebenso Sand- und Steinhaufen 2c.

Die sog. Pontons, deren Form aus Figur 80 ersichtlich und die häufig z. B. als Torfmiethen, Stein- oder Kieshaufen an Chausseen u. s. w. zur Berechnung kommen können, berechnet man aus dem Produkt der halben Summe der beiden Grundflächen mit der Höhe, also $J = \frac{A + a}{2} \,.\, h$; sind a und A



Figur 80.

z. B. Rechtecke, so berechnet man deren Flächeninhalt aus dem Produkt zweier anstoßender Seiten u. s. w. Diese Höhe mißt man am bequemsten außerhalb, indem man z. B. einen Stock auf den Kieshaufen parallel zur Erde legt und dessen Entfernung vom Boden ermittelt.

Den Inhalt kleinerer unregelmäßiger Körper findet man am leichtesten, indem man dieselben in ein würfelförmiges und mit Wasser oder feinem trockenem Sand gefülltes Gefäß thut; den Stand der Füllmasse mit dem Körper darin merkt man mit einem Strich an; dann nimmt man den Körper vorsichtig heraus und gießt mit einem Gefäß von bekanntem Inhalt wieder soviel Füllmasse zu, bis der Strich erreicht ist. Dies Verfahren wird bei sehr genauen Derbholzgehaltsermittlungen von Schichtmaaßen angewandt. Man hat hierzu auch eigene mit Gradeintheilung versehene Gefäße, die sog. Holzmesser oder Xylometer konstruirt.

§ 81.

Berechnung von kegelförmigen Körpern (Bäumen) und von Beständen.

Ganze Baumstämme haben bei abgeschnittener Spitze, in welchem Zustand dieselben in unseren Schlägen ausgehalten zu werden pflegen, die Form eines abgestutzten Kegels, nur daß sie in ihrer wirklichen Form etwas von der normalen Kegelform durch Aus- und Einbuchtungen abzuweichen pflegen. Derartig geformte abgestutzte Kegel werden in der Praxis aus dem Produkt der Mittelfläche und ihrer Höhe berechnet (vergl. § 79), indem man annimmt, daß das Zuviel unter der Mittelfläche und das Zuwenig über der Mittelfläche sich zum Cylinder ausgleichen, mithin, daß man es mit einem Cylinder zu thun hat, dessen Grundfläche gleich der Mittelfläche ist. Dies Verfahren ist das gewöhnliche und genügt vollständig für die Praxis.

Ist es jedoch nöthig, z. B. bei Taxationen, einen Probestamm genau zu berechnen, so theilt man denselben in gleich lange (1 bis 2 Meter) Stücke, berechnet jeden Abschnitt aus Mittelfläche und Länge und addirt die Inhalte der einzelnen Theile. Zweige, Wurzeln und Aeste werden, wie gleich hier bemerkt sein mag, entweder in Procenten geschätzt oder sie werden aufgearbeitet, gemessen, berechnet und schließlich nach ihrem Festgehalte zum Inhalt des Stammes addirt. Bei größter Genauigkeit wendet man den Xylometer an.

Zur schnellen Berechnung des Inhalts von stehenden Bäumen im Kopfe diene folgendes von mir an zahlreichen Versuchen erprobte, sehr einfache und doch ziemlich genaue Verfahren:

Man mißt resp. schätzt den Durchmesser des zu taxirenden Baumes in Brusthöhe, z. B. 47 cm, streicht die letzte Zahl, hier also 7 ab und erhebt die bleibende Zahl (4) in das Quadrat = 16; von der Quadratzahl streicht man von rechts nach links wiederum eine Decimale ab und erhält somit 1,6. Dies ist der Festgehalt des Baumes = 1,6 fm. Bei allen Zehnern, z. B. 50, 60, 70 ꝛc. cm Durchmesser, erhält man den Festgehalt genau in den Quadratzahlen 2,5, 3,6, 4,9 fm. Je weiter sich das Maaß des Durchmessers in den Einern von den Zehnern entfernt, um so ungenauer wird das Resultat, d. h. um so größer wird die Quadratzahl und muß man sich dann durch Interpolation helfen; im obigen Beispiel liegt der Durchmesser 47 cm näher bei 50 als bei 40, mithin näher beim Quadrat von 5,0 = 25 als beim Quadrat von 4,0 = 16; man wird also dementsprechend den Festgehalt nicht auf 1,6 fm annehmen, sondern auf etwa 2,3 fm; in gleicher Weise würde man beim Durchmesser von 43 cm den Festgehalt auf etwa 1,8 fm, von 45 cm auf 2,1 fm, von 49 cm auf 2,4 fm ꝛc. annehmen. Bei den in der Mehrzahl im Walde vorkommenden Stärkeklassen haubaren Holzes von 30—70 cm Durchmesser stimmt die Berechnung ziemlich genau, bei schwächeren Durchmessern haben die Stämme verhältnißmäßig einen geringeren, bei stärkeren Durchmessern verhältnißmäßig höheren Festgehalt, außerdem bedingen die Faktoren der Höhe und der Formzahl eine Aenderung des Festgehaltes; die obige Berechnung gilt nur für mittlere Verhältnisse.

Will man den Inhalt stehender Stämme genau ermitteln, so mißt man deren Grundfläche in Brusthöhe, kluppt sie, (hat man viele Stämme zu messen, so mißt man sich von unten 1,3 Meter am Körper ab und läßt sich an dieser Stelle, die meist in mittlere Brusthöhe fallen wird, einen Kreidestrich machen, um so einen Anhalt zu haben, daß man sämmtliche Bäume in derselben Höhe gemessen hat) und ermittelt ihre Höhe auf bekannte Weise. Würde man nun einfach die Grundfläche mit der Höhe multipliciren, so würde man einen großen Fehler machen, da man dann den Inhalt eines Cylinders über der Grundfläche finden würde; der Baum fällt aber ab und hat mehr oder minder die Gestalt eines Kegels. Um nun das Verhältniß des wirklichen kegelförmigen Bauminhalts zum Inhalt des Cylinders über derselben Grundfläche zu ermitteln, muß man denselben als Probestamm fällen, ihn genau messen und berechnen und mit dem Inhalt des berechneten Cylinders vergleichen.

Hätte man z. B. den Kubikinhalt des wirklichen Stammes = 0,98, den der Walze über derselben Grundfläche = 1,36 gefunden, so würde sich der Stamm zur Walze verhalten wie 0,98 : 1,36. Um nun die Zahl zu finden, mit welcher man den Baumcylinder (1,36) multipliciren müßte, um den wirklichen Stamminhalt zu finden, hat man 0,98 durch 1,36 zu dividiren und mit diesem Quotienten = 0,72 hätte man 1,36 zu multipliciren, um den wirklichen Stamminhalt = 0,979, abgekürzt = 0,98 zu finden, wie es ja unsere Rechnung bestätigt. Diese Zahl, die also weiter nichts ist, als der Quotient aus Stamm dividirt durch seine Stammwalze oder welche in Zahlen das Verhältniß der wirklichen Stammform zu einer Baumwalze von gleicher Grundfläche und Höhe ausdrückt, heißt **Formzahl**.

Es verhält sich der Inhalt des Cylinders zum Inhalt des Kegels wie 3 : 1, also würde ein Kegel $\frac{1}{3}$ = 0,33 eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche sein, d. h. die Formzahl des Kegels ist = 0,33. Da nun Bäume selten so stark abfallen, daß sie richtige Kegel darstellen, ebenso wenig aber so vollholzig sind, daß sie einem Cylinder gleichen, so wird sich die Formzahl sämmtlicher Bäume zwischen 0,33 (Kegel) und 1,00 (Cylinder) bewegen; die Formzahl wird um so größer, d. h. der Stamm um so vollholziger sein, je mehr sie sich 1,00 nähert. Ein Stamm mit der Formzahl 0,78 ist demnach bedeutend vollholziger oder hat eine bessere (höhere Formzahl) als ein Stamm mit der Formzahl 0,41. Unsere Waldbäume schwanken gewöhnlich in ihrer Formzahl zwischen 0,40—0,60.

Bei Stämmen, welche mit dem oben gefällten Probestamm gleich geformt sind, wird ein gleiches Verhältniß zum Cylinder (von gleicher Höhe und Grundfläche) bestehen und kann man ihren wirklichen Inhalt finden, wenn man ihren berechneten Walzeninhalt (Grundfläche mal Höhe) mit der ermittelten gemeinschaftlichen Formzahl multiplicirt.

Hat man nun die Holzmasse eines ganzen Bestandes aufzunehmen, so theilt man denselben in Höhen- oder Stärkeklassen und ermittelt durch Fällen eines Probestammes die Formzahl jeder Klasse; nachdem man nun den Inhalt jedes einzelnen Stammes nach Grundfläche und Höhe berechnet und die Inhalte sämmtlicher Stämme addirt hat, hat man den Gesammtinhalt jeder Klasse noch mit der gemeinschaftlichen Formzahl zu multipliciren (resp. zu reduciren).

Zur Erleichterung dieser Berechnuugen hat man Tabellen angefertigt, in denen die Inhalte nach Höhe, Durchmesser (oder Grundfläche) und Formzahl sich gleich ausgerechnet finden. Solche Tabellen heißen Massen- oder Ertragstafeln.*)

Ebenso hat man den Inhalt liegender Stämme nach Mittelfläche (oder Durchmesser) und Länge für alle möglichen Dimensionen ausgerechnet und in Tafeln zusammengestellt, so daß ihr Inhalt gleich abgelesen werden kann. Der Gebrauch solcher Tafeln ist nach den vorgedruckten Anweisungen leicht zu erlernen.

Da es nun meist zu umständlich sein wird, alle Stämme eines Bestandes zu messen, sucht man sich gewöhnlich Probeflächen aus (Probeflächenverfahren), die ein möglichst genaues Bild des ganzen Bestandes geben, mißt ihre Fläche aus, ermittelt genau den Massengehalt und findet dann die Masse des ganzen Bestandes, die mit x bezeichnet werden mag, einfach aus folgender Proportion:

$$\text{Probefläche} : \text{Gesammtfläche} = \text{Probeflächenmasse} : x$$

$$x = \frac{\text{Gesammtfläche} \cdot \text{Probeflächenmasse}}{\text{Probefläche}}$$

Beispiel: Probefläche = 5 Ar, Gesammtfläche = 15 Hectar

Probeflächenmasse = 30 Festmeter

$$5 : 1500 = 30 : x$$

$$x = \frac{1500 \cdot 30}{5} = 9000 \text{ Festmeter.}$$

Bei ungleichwüchsigen Beständen muß man mehrere Probeflächen nehmen, aus welchen man das Mittel zieht, um eine möglichst richtige Probeflächenmasse zu ermitteln. Kann man nicht messen, so genügt es auch, sämmtliche Stämme des Bestandes zu zählen, z. B. 5174 und hiermit die Masse des Probestammes z. B. 1,38 fm zu multipliciren (Probestammverfahren); dann ist die Bestandsmasse = 5174 . 1,38 = 7140 fm. Dies Verfahren ist aber ungenau, da man sich beim Auszählen großer Bestände leicht irren kann und Alles von der Richtigkeit des Probestammes abhängt; deshalb erhöht man die Genauigkeit, wenn man aus den am meisten vertretenen Höhen- nnd Stärkeklassen je einen oder mehrere Probestämme ermittelt und aus ihnen einen mittleren

*) Die bekanntesten Massentafeln sind die von Behm. Berlin, Verlag von Julius Springer; in 2 Ausgaben: für liegendes Holz (nach Höhe und Durchmesser) und für stehendes Holz (nach Höhe, Durchmesser in Brusthöhe und Formzahl).

Probestamm berechnet. Der Probestamm muß jedesmal nach Höhe, Durchmesser und Formzahl den Durchschnitt aller Stammklassen darstellen.

Zur Messung des Durchmessers bedient man sich eines Schiebemaaßes, der bekannten Kluppe; zur guten Kluppe gehört, daß beide Schenkel senkrecht zum Maaßstab stehen und daß der bewegliche Schenkel sich ohne Schlottern und Klemmen bequem verschieben läßt. Es verdienen solche Kluppen den Vorzug, welche gegen die Nachtheile des Schwindens und Quellens des Holzes durch Spiralfedern geschützt sind. Beim Gebrauch des weniger praktischen Meßbandes ist sehr darauf zu achten, daß es genau senkrecht zur Achse des Baumes umgelegt wird und die Theilung sich auf der Innenseite des Bandes befindet (für genaue Untersuchungen). Für die Notirung legt man sich ein Manual an, in welches die Stämme nach Holzarten, Stärke- und Höheklassen schematisch geordnet, so eingetragen werden, daß man sie zu 5 gruppirt. Am übersichtlichsten ist es, 4 Striche nebeneinander und einen Strich quer durch dieselben zu machen z. B.

Beim Messen des Durchmessers mit der Kluppe ist zu beachten, daß man das Gabelmaaß nicht zu locker und nicht zu fest andrückt, daß man den liegenden Stamm genau in der Mitte mißt und daß man, da nur selten ein Stamm genau rund ist, denselben am schwächsten und stärksten Durchmesser, also zweimal mißt; befinden sich in der Mitte Unebenheiten am Stamm, so mißt man in gleichen Abständen den Stamm ober- und unterhalb; aus mehreren Messungen ist dann stets das Mittel zu nehmen; überschießende Bruchtheile von Centimetern werden gewöhnlich außer Acht gelassen, wodurch man nach neueren Untersuchungen allerdings einen zu kleinen Massengehalt erhält. (cfr. Dankelmanns Zeitschrift für Forst- und Jagdwesen 1887 S. 247 und 1888 S. 64).