a. in die Zahlenlehre oder Arithmetik, welche sich nur mit den Zahlen beschäftigt und zugleich die Grundlage der ganzen Wissenschaft bildet, und

b. in die Größenlehre oder Geometrie, welche die Beziehungen der Größen unter sich untersucht. Je nachdem sich die Größenlehre nun mit Flächen oder Körpern beschäftigt, zerfällt sie in die Unterabtheilungen:

1. Flächenvermessung oder Planimetrie;
2. Körpervermessung oder Stereometrie.

a. Zahlenlehre oder Arithmetik.

§ 61.

Allgemeine Begriffe.

Rechnen ist die Kunst, aus gegebenen Zahlen unbekannte Zahlen zu finden; die gesuchten unbekannten Zahlen nennt man das Ergebniß oder Resultat; man gelangt zum Resultate durch vier Hauptrechnungsarten — das Addiren, das Subtrahiren, das Multipliciren und Dividiren —, auch die vier Species genannt, welche hier als bekannt vorausgesetzt werden dürfen.

In der Einleitung haben wir gesehen, daß die Einheit eine Größe ist, mit welcher man benannte Zahlen mißt; denkt man sich diese Einheit in mehrere gleiche Theile getheilt oder gebrochen, so bildet jeder dieser Theile einen sogenannten Bruch, und die Zahl, welche denselben ausdrückt, ist eine gebrochene Zahl. Ist die Einheit z. B. in acht gleiche Theile getheilt, also in acht Theile oder kürzer in Achtel, so bilden $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} \cdots \frac{7}{8}, \frac{8}{8}$ Brüche, welche man in der angegebenen Weise schreibt. Diejenige Zahl, welche die Theile nennt, in welche die Einheit getheilt wurde, steht unter dem Strich und heißt Nenner, diejenige Zahl, welche die Theile der Einheit zählt, steht über dem Strich und heißt Zähler. Ist Nenner und Zähler gleich wie oben in dem Bruch $\frac{8}{8}$, so haben wir wieder die Einheit; ein jeder derartiger Bruch ist gleich 1. Zeigt ein Bruch im Zähler eine größere Zahl als im Nenner, so erhalten wir eine größere Zahl als 1 oder einen sogenannten unechten Bruch. Jeder unechte Bruch besteht demnach aus der Einheit oder dem ganzen und noch einem echten Bruch, wie man jeden Bruch nennt, in welchem der Zähler kleiner ist als der Nenner.

§ 63.

Die vier Species der gemeinen Brüche.

Jeder Bruch ist der sovielste Theil seines Zählers als sein Nenner anzeigt; der Bruch $\frac{6}{8}$ ist demnach der achte Theil von sechs; der Bruch deutet mithin nichts anderes an als ein Dividiren, bei dem der Nenner der Divisor und der Zähler der Dividendus ist; der Bruch selber ist ein eigenthümlich geschriebener Quotient; $\frac{6}{8}$ heißt demnach genau soviel als 6 dividirt durch 8 oder $6 : 8$.

Bei unechten Brüchen führt man zur Ermittelung der in demselben enthaltenen Ganzen die Division auch aus, z. B. der unechte Bruch $\frac{59}{8}$ bedeutet soviel als $59 : 8 = 7\frac{3}{8}$.

Multiplication von Brüchen. Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

$$\text{z. B. } \frac{5}{7} \cdot (\times) \frac{9}{21} = \frac{45}{147};\ \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{20} = 1\tfrac{1}{20}.$$

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, indem man den Zähler desselben mit der ganzen Zahl multiplicirt.

$$\text{z. B. } \frac{4}{5} \cdot 6 = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5} = 4\tfrac{4}{5}.$$

Division von Brüchen. Zwei Brüche werden durch einander dividirt, indem man den Divisor (Nennerbruch) umkehrt (d. h. den Nenner zum Zähler macht) und den Dividendus (Zählerbruch) nach vorstehender Regel mit demselben multiplicirt.

z. B. $\frac{6}{8}$ dividirt durch $\frac{3}{5}$ oder auf andere Weisen geschrieben $\frac{6}{8} : \frac{3}{5}$ oder $\frac{\frac{6}{8}}{\frac{3}{5}}$ ist gleich $\frac{6}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{30}{24} = 1\frac{6}{24} = 1\frac{1}{4}$.

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, indem man den Nenner desselben mit der Zahl multiplicirt.

$$\text{z. B. } \frac{6}{8} : 5 \text{ oder } \frac{\frac{6}{8}}{5} = \frac{6}{8 \cdot 5} = \frac{6}{40}.$$

Alle Brüche bleiben unverändert, wenn man sie im Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt.

$$\text{z. B. } \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} \ldots \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} \text{ u. s. w.;}$$

wenn man nämlich die Multiplication ausführt, so erhält man immer wieder $\frac{3}{4}$.

$$\text{z. B. } \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} \text{ oder } \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}, \text{ da } \frac{6}{8} \text{ und } \frac{9}{12} = \frac{3}{4};$$

in gleicher Weise bleiben Brüche unverändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt.

$$\text{z. B. } \frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}.$$

Letzteres nennt man das Heben der Brüche.

Brüche, in welchen Zähler und Nenner große Zahlen bilden, vereinfacht (reducirt oder hebt) man dadurch, daß man Zähler und Nenner mit denselben Zahlen so lange dividirt, bis sie sich nicht mehr mit einer gemeinschaftlichen Zahl weiter theilen lassen.

z. B. den Bruch $\frac{21420}{30240}$ verwandelt man zunächst durch Theilung von Zähler und Nenner mit 10 in den Bruch $\frac{2142}{3024}$, durch weitere Theilung mit 2 in $\frac{1071}{1512}$, durch weitere Theilung mit 3 in $\frac{357}{504}$, durch nochmalige Theilung mit 3 in $\frac{119}{168}$, durch nochmalige Theilung mit 7 in $\frac{17}{24}$; da sich 17 und 24 durch keine gemeinschaftliche Zahl weiter theilen lassen, so ist $\frac{17}{24}$ der kleinste andere Bruch, durch den sich $\frac{21420}{30240}$ ausdrücken läßt.

Hierbei sei gleich erwähnt, daß man alle Zahlen, deren größter gemeinschaftlicher Theiler gleich eins ist oder die außer eins und sich selbst keinen anderen Theiler haben, Primzahlen nennt; also 17 ist z. B. eine Primzahl, außerdem sind noch Primzahlen z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29 ꝛc.

Um sich das Vereinfachen (Reduciren, Heben) von großen Brüchen zu erleichtern, hat man folgende eigenthümlichen Gesetze herausgefunden:

1. Läßt sich eine Zahl durch eine andere theilen, so ist auch jedes Vielfache dieser Zahl durch dieselbe Zahl theilbar.
2. Lassen sich zwei Zahlen durch eine andere theilen, so lassen sich auch ihre Summen und Differenzen durch dieselbe Ziffer theilen.
3. Eine Zahl ist durch 10 theilbar, wenn deren letzte Zahl eine 0 ist.
4. Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn die letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist.
5. Eine Zahl ist durch 2 theilbar, wenn deren Einer durch 2 theilbar sind.
6. Eine Zahl ist durch 4 theilbar, wenn deren Zehner und Einer durch 4 theilbar sind.
7. Eine Zahl ist durch 8 theilbar, wenn deren Hunderte, Zehner und Einer durch 8 theilbar sind.
8. Eine Zahl ist durch 3 und 9 theilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 und 9 theilbar ist.
9. Eine Zahl ist durch 6 theilbar, wenn sie durch 2 und 3 theilbar ist.

Um Brüche zu einander addiren oder von einander subtrahiren zu können, muß man ihre Nenner gleich machen, d. h. für sie einen gemeinschaftlichen Nenner, Generalnenner und zwar den kleinsten Generalnenner finden. Ist dieser gefunden, so hat man die Zähler zu addiren oder zu subtrahiren und ihrer Summe oder ihrer Differenz den Generalnenner zu geben; der kleinste Generalnenner wird einfach dadurch gefunden, daß man die Nenner der Brüche neben einander hinschreibt und so lange als möglich in dieselben mit den kleinsten Primzahlen hineindividirt; das Produkt sämmtlicher Theilzahlen und Primzahlen ist der gesuchte kleinste Generalnenner. Die beiden folgenden Beispiele werden das Verfahren verdeutlichen:

Es sind zu addiren: $\frac{2}{3} + \frac{2}{7} + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{7}{8}$;

	3	7	9	4	8
2)	3	7	9	2	4
2)	3	7	9	1	2
3)	1	7	3	1	2

Da sich die in der untersten Linie stehenden Ziffern nicht mehr theilen lassen, so sind es Primzahlen und haben wir sie nur mit den an der Seite stehenden gemeinschaftlichen Theilern, die ebenfalls Primzahlen sein müssen, zu multipliciren, um den Generalnenner zu erhalten.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 = 504.$$

Um nun zu erfahren, wie sich die einzelnen Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$ ꝛc. zum Generalnenner 504 verhalten, haben wir mit jedem Nenner in den Generalnenner hinein zu dividiren und die so erhaltene Zahl mit den einzelnen Brüchen zu multipliciren; der Uebersichtlichkeit wegen schreibt man sämmtliche Nenner, wie es das Beispiel zeigt, vor einen senkrechten Strich und über denselben den Generalnenner.

$$\begin{array}{c|l}
 & 504 \\
\hline
\frac{2}{3} & \frac{504}{3} = 168 = \frac{168 \cdot 2}{168 \cdot 3} = \frac{336}{504} \qquad 336 \\
\frac{2}{7} & \frac{504}{7} = 72 = \frac{72 \cdot 2}{72 \cdot 7} = \frac{144}{504} \qquad 144 \\
\frac{4}{9} & \frac{504}{9} = 56 = \frac{56 \cdot 4}{56 \cdot 9} = \frac{224}{504} \qquad 224 \\
\frac{1}{4} & \frac{504}{4} = 126 = \frac{126 \cdot 1}{126 \cdot 4} = \frac{126}{505} \qquad 126 \\
\frac{7}{8} & \frac{504}{8} = 63 = \frac{63 \cdot 7}{63 \cdot 8} = \frac{441}{504} \qquad 441 \\
 & \text{Summa } \frac{1271}{504} = 2\tfrac{263}{504}.
\end{array}$$

Beim Subtrahiren wird in gleicher Weise verfahren; z. B. es ist von $\frac{7}{8}$ abzuziehen $\frac{5}{12}$.

$$\begin{array}{r|l}
 & 8 \cdot 12 \\
\hline
4) & 2 \cdot 3
\end{array}$$

$$\text{Generalnenner} = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

$$\begin{array}{c|l}
 & 24 \\
\hline
\frac{7}{8} & 21 \\
\frac{5}{12} & 10 \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Rest} = \frac{11}{24}.$$

Für dieses Beispiel ist die abgekürzte Rechnungsschreibweise gewählt, um auch diese zu zeigen; die Rechnung vollständig ausgeführt, würde sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{array}{l} \quad 24 \\ \frac{7}{8} \Big| \frac{24}{8} = 3; \ \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}; \ 21 \\ \frac{5}{12} \Big| \frac{24}{12} = 2; \ \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{10}{24}; \ 10 \\ \hline \text{Rest} = \frac{11}{24}. \end{array}$$

Auf einem anderen Wege kann man zwei Brüche von einander subtrahiren, indem man den Zähler des Minuendus mit dem Nenner des Subtrahendus und ebenso den Nenner des Minuendus mit dem Zähler des Subtrahendus multiplicirt, das letztere Produkt vom ersteren abzieht und den Rest als Zähler, das Produkt der Nenner beider von einander abzuziehenden Brüche aber als Nenner des neuen Restbruches hinschreibt.

z. B. $\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = \frac{7 \cdot 12 - 8 \cdot 5}{8 \cdot 12} = \frac{84 - 40}{96} = \frac{44}{96} = \frac{11}{24}$,

also genau dasselbe Resultat wie vorher.

§ 63.

Rechnen mit zehntheiligen Decimalbrüchen.

Alle Brüche, deren Zähler eine ganze Zahl, deren Nenner 10 oder eine Potenz*) von 10 ist, nennt man einen zehntheiligen oder **Decimalbruch**. Der Bequemlichkeit wegen läßt man beim Schreiben den Nenner allemal fort und deutet denselben dadurch an, daß man im Zähler von rechts nach links soviel Stellen durch ein Komma (Decimalstrich) abschneidet, als der Nenner Nullen haben würde. Diejenigen Ziffern, welche links vom Komma stehen, sind die Ganzen, welche rechts vom Komma stehen sind die Decimalstellen, d. h. sie drücken einen Bruch aus, dessen Zähler die betreffenden Ziffern, dessen Nenner eine 1 **und außerdem** so viele Nullen als der Zähler Ziffern hat, bilden.

Sollten im Zähler nicht genug Ziffern oder keine Ganzen vorhanden sein, so ergänzt man sie durch Nullen. Die erste Stelle rechts

---

*) Wenn man eine Zahl (Grundzahl) 2, 3, 4 ꝛc. mal mit sich selbst multiplicirt, so nennt man dies die Zahl potenziren, z. B. 10 viermal mit sich selbst multiplicirt, ist die 4. Potenz von 10 = 10000.

vom Komma steht immer in der Stelle der Zehntel, die zweite in der Stelle der Hunderte u. s. w.

z. B. $213\frac{24}{100}$ schreibt man als Decimalbruch 213,24:

$$2132\frac{4}{10} = 2132{,}4 \text{ u. s. w.} \quad \frac{23}{1000} = 0{,}023;$$

$$\frac{234}{100} = 2{,}34; \quad \frac{234}{10} = 23{,}4.$$

Addiren von Decimalbrüchen. Decimalbrüche werden addirt, indem man die Brüche so unter einander schreibt, daß sämmtliche Kommata genau unter einander stehen, worauf man die Brüche wie ganze Zahlen addirt und nur das Komma stehen läßt.

$$\text{z. B.}\quad \begin{array}{r} 3564{,}121 \\ 1{,}2 \\ 5430{,}003 \\ 62{,}102 \\ 2000{,}2 \\ \hline 11057{,}626 \end{array} = 11057\tfrac{626}{1000}.$$

Subtrahiren von Decimalbrüchen. Man verfährt ähnlich wie beim Addiren, d. h. man schreibt die abzuziehenden Zahlen genau mit den Kommas unter einander und füllt, wenn die Stellen rechts vom Komma in beiden Brüchen nicht gleich sein sollten, dieselben durch Nullen aus, die das Nichtvorhandensein von Stellen andeuten.

$$\text{z. B. } 17{,}04 - 2{,}005783 = \begin{array}{r} 17{,}040000 \\ -\ \ 2{,}005783 \\ \hline 15{,}034217 \end{array}$$

$$\text{oder z. B. } 301{,}00572 - 101{,}01 = \begin{array}{r} 301{,}00572 \\ -\ 101{,}01000 \\ \hline 199{,}99572 \end{array}.$$

Multipliciren von Decimalbrüchen. Zwei Decimalbrüche werden multiplicirt, indem man sie wie ganze Zahlen multiplicirt und dem erhaltenen Produkt soviel Decimalstellen (rechts vom Komma!) giebt, als beide Faktoren zusammen haben. Reichen die Ziffern nicht aus, so werden sie durch Nullen ergänzt.

$$\text{z. B.}\quad \begin{array}{r} 2{,}10 \cdot 3{,}1 \\ \hline 210\phantom{\cdot 3{,}1} \\ 630\phantom{0\cdot 3{,}1} \\ \hline 6{,}510\phantom{\cdot 3{,}1} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 2{,}3 \cdot 0{,}04 \\ \hline 0{,}092 \end{array}$$

Der erste Decimalbruch (2,10) hat zwei Decimalen, der zweite

(3,1) eine Decimale, folglich muß das Produkt 2 + 1 = 3 Decimalen haben.

Ein Decimalbruch wird mit 10, 100 u. s. w. multiplicirt, indem man einfach das Komma um soviel Stellen von links nach rechts rückt, als der Multiplicator Nullen hat.

z. B. $40{,}372 \cdot 100 = 4037{,}2$, da 100 zwei Nullen hat, so rückt das Komma zwei Stellen von links nach rechts, also hinter 7; oder $2{,}1357801 \cdot 100000 = 213578{,}01$.

Dividiren von Decimalbrüchen. Decimalbrüche werden dividirt, indem man Divisor und Dividend gleichstellig macht und dann verfährt wie mit ganzen Zahlen.

z. B. $0{,}5 : 0{,}35?$ $\quad$ $5 : 0{,}35?$

$0{,}50 : 0{,}35$ $\quad$ $5{,}00 : 0{,}35$

$50 : 35 = 0{,}7.$ $\quad$ $500 : 35 = 0{,}07.$

Ein Decimalbruch wird durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt, indem man das Komma um soviel Stellen von rechts nach links rückt, als obige Zahlen Nullen haben. Sollten die vorhandenen Nullen nicht ausreichen, so setzt man soviel Nullen vor, als erforderlich sind.

z. B. $1000 : 0{,}567 = 0{,}000567.$

Umwandlung von Brüchen in Decimalbrüche. Wie oben bereits angedeutet wurde, ist jeder Bruch als eine Division des Nenners in den Zähler anzusehen; führt man diese Division aus, so kann man jeden Bruch in einen Decimalbruch verwandeln; man hängt bei echten Brüchen dem Zähler soviel Nullen an, daß die Division möglich ist und schreibt soviel Nullen, als man angehängt hat, als erste Stellen des Quotienten hin. Zwischen die ersten Nullen kommt das Komma.

z. B. $\frac{5}{125}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln?

$$125 : 500 = 0{,}04;$$

geht die Division nicht auf, so kann man sich durch Anhängen von Nullen an den Zähler und fortgesetzte Division dem wahren Werthe bis zu jeder gewünschten Genauigkeit nähern.

Abkürzen von Decimalstellen. Die letzte Stelle, bei welcher man abkürzen muß oder will, wird um 1 erhöht, sobald die folgende Stelle 5 oder größer als 5 ist; ist die folgende Stelle kleiner als 5, läßt man nur die letzte Stelle unverändert.

z. B. 3,4157 würde bei 5 abgekürzt lauten 3,416 (7 ist größer als 5), dagegen 3,4154 unverändert 3,415 (4 ist kleiner als 5). 3,4155 abgekürzt 3,416, weil 5 selbst ebenfalls erhöht.

§ 64.

Einfacher Regeldetri-Dreisatz.

Alle Aufgaben der Regeldetri bestehen aus drei gegebenen Gliedern, zu welchen das vierte gesucht werden soll. Bestandtheile einer solchen Aufgabe sind:

1) das Frageglied (gewöhnlich mit einem ? oder x bezeichnet); 2) das Haupt- oder Parallelglied, welches mit dem Frageglied gleiche Benennung hat; 3) zwei bedingende Glieder.

Die gegebenen Größen stehen nun in den Regeldetri-Aufgaben in einem bestimmten Verhältnisse; nehmen dieselben gleichmäßig zu oder ab, so stehen sie im geraden (direkten) Verhältnisse und die Verhältnisse selbst sind im ersten Falle steigend, im letzteren fallend; steigt aber das eine Verhältniß, während das andere fällt, so sind dieselben ungerade zusammengesetzte (indirekte) Verhältnisse, z. B. je mehr Zeit zu einer Arbeit, desto weniger Arbeiter sind erforderlich. Wir lösen alle diese Aufgaben durch Schluß. Bezüglich der Schlüsse können unterschieden werden:

a. Der Schluß von der Einheit auf die Mehrheit;

b. umgekehrt von der Mehrheit auf die Einheit.

Alle diese Aufgaben lassen sich als bloße Multiplications- und Divisions-Aufgaben betrachten.

c. Der Schluß von einer Mehrheit auf ein Vielfaches derselben;

d. der Schluß von einer Mehrheit auf einen verwandten (aliquoten) Theil derselben.

Auch diese beiden Arten sind durch einfache Multiplication und Division zu lösen.

e. Der Schluß von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit vermittelst des gemeinschaftlichen Maaßes. Hierbei läßt sich heben und kürzen;

f. der Schluß von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit vermittelst der Einheit.

Dieses Verfahren findet die häufigste Anwendung.

Beispiele

zu a. Wenn 1 kg Kiefernsamen $2\frac{3}{4}$ M. kostet — wie theuer sind $4\frac{3}{4}$ kg?

$$2\tfrac{3}{4} \cdot 4\tfrac{3}{4} = \frac{11}{4} \cdot \frac{19}{4} = \frac{209}{16} = 13\tfrac{1}{16} \text{ M.}$$

Zu b. 19 m Zeug kosten 60 M. 80 Pf.; was kostet 1 m?

60 M. 80 Pf. : 19 = 3 M. 20 Pf.
57
380.

Zu c. Eine Festung hat Proviant für 1600 Mann auf $5\frac{1}{2}$ Monat; wie lange würden mit demselben Vorrath 4800 Mann reichen?

1600 Mann reichen $5\frac{1}{2}$ Monat
4800 „ „ ? „

$$? = \frac{11 \cdot 1600}{2 \cdot 4800} = \tfrac{11}{6} = 1\tfrac{5}{6} \text{ Monat.}$$

Zu d. 6 Zimmergesellen fertigen einen Dachstuhl in 8 Wochen 3 Tagen an; wieviel Gesellen muß der Meister anstellen, wenn die Arbeit in 2 Wochen 5 Tagen fertig soll?

2 W. 5 Tag. = 17 Arbeitst. sind der 3. Theil von 8 W. 3 Tag. (51 Tag.). Soll also der Dachstuhl in dem 3. Theil der Zeit fertig werden, so braucht man die dreifache Arbeitskraft.

Ansatz: Um in 51 Tag. fert. z. werd., br. m. 6 Ges.
„ „ 17 „ „ „ „ „ „ ? „

$$? = \frac{6 \cdot 51}{17} = 18 \text{ Ges.}$$

Zu e. 12 Pfd. kosten 14 M. 40 Pf., wie theuer sind 9 Pfd.?

Wir schließen zunächst auf das gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 12 und 9; das ist 3. Wir fragen nach dem Preis von 3 Pfd.; 3 Pfd. ist der 4. Theil von 12 Pfd.; folglich kosten sie den 4. Theil von 14 M. 40 Pf.

Ansatz: 12 Pfd. kosten 14,40 M.
9 „ „ ? „

$$? = \frac{14{,}40 \cdot 9}{12} = \frac{14{,}40 \cdot 3}{4} = \frac{43{,}20}{4} = 10 \text{ M. } 80 \text{ Pf.}$$

Zu f. 7 Buch Zeichenpapier kosten 5 M.; was kosten 9 Buch?

Wir schließen zunächst von der Mehrheit auf die Einheit und dann auf die andere Mehrheit. Wenn 7 Buch 5 M. kosten, so kostet

1 Buch den 7. Theil von 5 M. $= \frac{5}{7}$ M., mithin 9 Buch 9mal so viel.

Ansatz: 7 Buch kosten 5 M.

9 „ „ ? „

$$? = \frac{5 \cdot 9}{7} = \frac{45}{7} = 6\tfrac{3}{7} \text{ M.}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

1. Wenn man täglich 60 Pf. ausgiebt, so reicht man 7 Wochen 4 Tage; wie lange reicht man, wenn man täglich nur 40 Pf. ausgiebt? (11 Wochen $2^1/_2$ Tag!)

2. 27 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit $7^1/_2$ Tag, wie lange brauchen zu derselben Arbeit 12 Arbeiter? ($16^7/_8$ Tag!)

3. Ein Saal soll mit Decken belegt werden. Liegt der Stoff 0,6 m breit, so sind 50,75 m nöthig; wieviel m gebraucht man, wenn der Stoff: a. 0,9; b. 0,65; c. 1,05; d. 1,18 m breit liegt? (a. 33,833, b. 46,846, c. 29, d. 25,805 m.)

4. $51^1/_3$ m $1^3/_4$ m breites Zeug wird gegen $1^2/_3$ m breites umgetauscht; wieviel erhält man? (53,9 m.)

5. Aus einer Kiefer können 25 Bretter von $4^1/_2$ cm Stärke geschnitten werden; wieviel erhält man, wenn dieselben $3^3/_4$ cm dick werden sollen? (30 Stück.)

6. Ein Fuhrmann ladet auf ein Pferd 10 Scheffel Weizen; wieviel auf 2 Ochsen, wenn 3 Pferde soviel ziehen als 4 Ochsen? (15 Scheffel.)

§ 65.

Zusammengesetzte Regeldetri.

Zusammengesetzte Regeldetri-Aufgaben entstehen, wenn sie aus mehr als 3 — also z. B. aus 5, 7, 9 u. s. w. gegebenen Gliedern bestehen, zu welcher das 6., 8., 10 u. s. w. Glied gesucht werden soll.

Da in diesen Aufgaben immer eine Zahl vorkommt, die mit der gesuchten gleichartig ist, außerdem aber je zwei gleichartige, so enthalten die Aufgaben immer eine ungerade Zahl von Gliedern.

Wir lösen diese Aufgaben ebenfalls durch Schluß und bedienen uns dabei des Bruchsatzes, weil er am natürlichsten und verständlichsten ist.

Beispiele:

1) 9 Mädchen stricken in 18 Tag. 54 Paar Strümpfe; wieviel Paare stricken 12 Mädchen in 4 Tagen?

9 M. str. in 18 Tag. 54 Paar
1 „ „ „ 18 „ 54 : 9 = 6 Paar
1 „ „ „ 1 „ 6 : 18 = $\frac{1}{3}$ „

12 M. str. in 1 Tag. $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ Paar.
12 „ „ „ 4 „ $4 \cdot 4 = 16$ „

oder mit Hilfe des gemeinschaftlichen Maaßes.

9 M. str. in 18 Tag. 54 Paar
3 „ „ den 3. Theil = 18 Paar
12 „ „ das 4fache = 72 „

72 P. stricken 12 M. in 18 Tag., da str. sie in 2 Tag. den 9. Th. von 72 P. = 8 P. und in 4 Tag. das Doppelte = 16 Paar.

Ansatz: 9 M. str. in 18 Tag. 54 Paar
12 „ „ „ 4 „ ? „

$$? = \frac{54 \cdot 12 \cdot 4 \cdot}{9 \cdot 18} = \frac{12 \cdot 4}{3} = 16 \text{ Paar.}$$

2) 4 Pflüge bearbeiten in $3\frac{1}{2}$ Tag. $8\frac{3}{4}$ ha Kulturfläche; in wieviel Tag. können mit 5 Pfl. $12\frac{1}{2}$ ha bearbeitet werden.

4 Pfl. br. $3\frac{1}{2}$ Tag.
1 „ „ $4 \cdot 3\frac{1}{2}$ T. = 14 Tage.
5 „ „ den 5. Theil = $2\frac{4}{5}$ Tage.

$2\frac{4}{5}$ Tage brauchen sie, um $8\frac{3}{4}$ ha umzupflügen, um $\frac{1}{4}$ ha zu bearbeiten, brauchen sie den 35. Theil von $\frac{14}{5}$ Tag = $\frac{2}{25}$ Tag.

Um $\frac{1}{2}$ ha zu bearb. br. sie $2 \cdot \frac{2}{25} = \frac{4}{25}$ Tag.,
„ $\frac{25}{2}$ „ „ „ „ „ $\frac{25 \cdot 4}{25} = 4$ Tage.

Ansatz: 4 Pflüge brauchen um $8\frac{3}{4}$ ha zu bearbeiten $3\frac{1}{2}$ Tag
5 „ „ „ $12\frac{1}{2}$ „ „ „ ? „

$$? = \frac{7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 25}{2 \cdot 5 \cdot 35 \cdot 2} = 4 \text{ Tage.}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

1. Wieviel verdienen 8 Arbeiter in 10 Wochen bei täglich zweistündiger Arbeit, wenn 20 Arbeiter in 12 Wochen bei täglich fünfstündiger Thätigkeit 1000 M. verdienen? ($133^1/_3$ M.)

2. An einem Wege haben drei Abtheilungen gearbeitet, und zwar 16 Mann 10 Tage, 20 Mann 12 Tage und außerdem noch 25 Mann. Sie erhalten zusammen 1350 M., wovon die 3. Abtheilung 550 M. bekommt; wie lange hat sie gearbeitet? (11 Tage!)

§ 66.

Zinsrechnung.

Verborgt man einem Anderen Geld, so nennt man diese Summe **Kapital**, der Verleiher heißt **Gläubiger**, der Beliehene **Schuldner**. Der Schuldner soll stets einen Schuldschein in der gesetzlich vorgeschriebenen Form (Namen des Verleihers und Beliehenen, Kapital, Zinsfuß, Zeit, Ort und Datum) ausstellen.

Bei großen Summen und Unsicherheit des Schuldners fordert der Gläubiger eine obrigkeitliche Sicherstellung (**Hypothek**), durch welche im Falle der Rückzahlungsunfähigkeit als Unterpfand Häuser und Grundstücke zugesichert werden; man unterscheidet nach der Zeit der Beleihungen erste, zweite u. s. w. Hypothek; bei gerichtlichen Verkäufen (Subhastationen) haben die ersten Hypotheken das Vorrecht der Rückzahlung vor den letzten. Für die Hingabe des Kapitals hat Schuldner dem Gläubiger eine Vergütung zu zahlen, welche man **Zinsen** oder **Interessen** nennt. Die Bestimmung, wieviel Mark Zinsen von je 10 M. Kapital in einem Jahre zu zahlen, nennt man **Zinsfuß** oder Procente (lat. pro centum — fürs Hundert), gewöhnlich p. c. oder % bezeichnet.

Ein Kapital verzinst sich zu $4\frac{3}{4}$ % heißt, je 100 M. bringen in 1 Jahr $4\frac{3}{4}$ M. Zinsen. Die Zinsrechnung hat es mit 4 Größen zu thun und zwar: Kapital, Zinsen, Zeit und Zinsfuß. Drei Größen müssen stets gegeben sein, die vierte wird gesucht; ist die Zeit nicht bestimmt, so wird immer ein Jahr genommen und zwar zu 360 — der Monat zu 30 Tagen.

Einfache Zinsrechnung.

Das Frageglied ist von zwei bedingenden Gliedern abhängig; wir lösen diese Aufgaben nach Art der einfachen Regeldetri.

a. Die Zinsen werden gesucht.

(Gegeben sind Kapital, Zinsfuß und Zeit.)

1. Wieviel betragen die Zinsen von 532 M. zu 4 %?

Wenn 100 M. 4 M. geben, so geben 500 M. $5 \cdot 4 = 20$ M., $25 = \frac{1}{4}$ Hundert geben 1 M. und 7 M. geben $7 \cdot 4$ Pf. $= 28$ Pf., zusammen 21 M. 28 Pf. (20 + 1 M. + 28 Pf.).

Merke: Soviel M. das Hundert bringt, soviel Pf. die Einheit.

Ansatz: 100 M. Kap. bringt 4 M. Zinsen
532 „ „ „ ? „ „

$$? = \frac{4 \cdot 532}{100} = 21{,}28 \text{ M.}$$

2. Ein Haus — für 7600 M. gekauft — verzinst sich zu $5\frac{1}{2}$ %; wieviel Ertrag bringt es jährlich?

Wenn 100 M. $5\frac{1}{2}$ M. einbringen, so bringen 1000 M. 55 M.

7000 M. br. $7 \cdot 55 = 385$
600 „ „ $6 \cdot 5\frac{1}{2} = 33$
Sa. $= 418$ M.

Ansatz: 100 M. Kap. br. $5\frac{1}{2}$ M. Z.
7600 „ „ „ ? „ „

$$? = \frac{11 \cdot 7600}{2 \cdot 100} = 418 \text{ M.}$$

b. Das Kapital wird gesucht.
(Gegeben: Zinsen, Zeit und Zinsfuß.)

1. Wieviel Geld müßte man zu $4^1/_2$ % ausleihen, wenn man jährlich $31\frac{1}{2}$ M. Zinsen beziehen will?

Um $4\frac{1}{2}$ M. Zinsen zu bekommen, muß man 100 M. verleihen, um $31\frac{1}{2}$ M. Zinsen zu erhalten, muß man soviel Mal 100 M. verleihen, als $4\frac{1}{2}$ in $31\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ in $\frac{63}{2} = 7$ mal enthalten ist, also 700 M.

Ansatz: Um $4\frac{1}{2}$ M. Z. zu erh. muß m. 100 M. verl.
„ $31\frac{1}{2}$ „ „ „ „ „ „ ? „ „

$$? = \frac{100 \cdot 2 \cdot 63}{9 \cdot 2} = 100 \cdot 7 = 700 \text{ M.}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

4 M. 25 Pf. Zinsen zu 5 % (85 M.). 12 M. 80 Pf. Zinsen zu 4 %? (320 M.)
23 „ — „ „ „ $4^1/_2$ „? (512 „). 37 „ $45^1/_2$ „ „ „ $5^1/_2$ „? (681 „)

c. Die Zeit wird gesucht.
(Gegeben: Kapital, Zinsen und Zinsfuß.)

Wann tragen 1000 M. zu 5 % 50 M. Zinsen?

1000 M. brauchen in 1 Jahr zu 5 % 50 M. Zinsen. Um 50 M. Zinsen zu erheben, muß das Kapital 1 Jahr verliehen werden, um aber 125 M. Zinsen zu erhalten, muß das Kapital so viel Jahre verliehen werden, als 50 in 125 enthalten; $= 2\frac{1}{2}$ Jahre.

Ansatz: Um 50 M. zu erhalten, muß das Kapital 1 Jahr stehen,
" 125 " " " " " " ? " "

$$? = \frac{1 \cdot 125}{50} = 2{,}5 \text{ Jahre.}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

Berechne die Zeit, in welcher die Zinsen die Höhe des Kapitals erreichen, wenn letzteres a. zu 5, b. zu 4, c. zu 6, d. zu $4^1/_2$, e. zu 3,2, f. zu 3,3, g. zu 4,9 % verliehen ist? (a. 20, b. 25, c. $16^2/_3$, d. $22^2/_9$, e. $31^1/_4$, f. $30^{10}/_{33}$, g. $20^{20}/_{49}$ Jahre.)

d. Der Zinsfuß wird gesucht.

(Gegeben: Kapital, Zinsen und Zeit.)

Zu wieviel % muß man 800 M. ausleihen, um jährlich 36 M. Zinsen zu bekommen?

Wir fragen nach den Zinsen, welche 100 M. bringen! Wenn 800 M. Kapital 36 M. Zinsen bringen, so bringen 100 M. den 8. Theil von 36 M. $= 4^1/_2$ M.; das Kapital ist also zu $4^1/_2$ % verliehen.

Ansatz: 800 M. Kapital geben 36 M. Zinsen.
100 " " " ? " "

$$? = \frac{36 \cdot 100}{800} = 4\tfrac{1}{2} \text{ M.}$$

Weitere Uebungsaufgaben.

Bei wieviel % sind die Zinsen a. $^1/_4$, b. $^1/_5$, c. $^1/_6$, d. $^1/_{10}$, e. $^1/_{20}$, f. $^1/_{25}$, g. $^1/_{30}$. h. $^1/_{50}$ des Kapitals? (a. bei 25, b. 20, c. $12^1/_2$, d. 10, e. 5, f. 4, g. $3^1/_2$, h. 2 %.)

b. Größenlehre.

§ 67.

Raumlehre und Geometrie.

Mit der Raumlehre gelangen wir zur sogenannten angewandten Mathematik, die für den Forstmann eine hohe praktische Bedeutung hat, indem sie ihn Flächen und Körper vermessen lehrt. Man hat in Deutschland folgende gesetzlich vorgeschriebene Maaße: